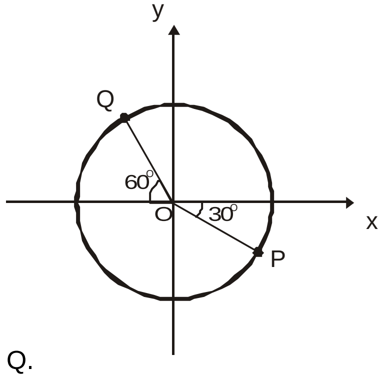
Matemática - Gabarito – Grupos I e J

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere os pontos P e Q pertencentes à circunferência de centro na origem e raio 1, conforme representação abaixo.



Determine a distância entre P e Q.

Cálculos e respostas:

Pela lei dos cossenos

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 - 2\,\overline{OQ}\cdot\overline{OP}\cos 150^{o} = 1+1-2\cdot1\cdot1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

ou

P (cos 30^o, – sen 30^o) = $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e

Q (– cos 60^o, sen 60^o) = $Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Logo,

$$\overline{PQ} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4} + \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliou-se um grupo de alunos da UFF, classificando-se, cada um deles, em doente ou saudável. Em relação a esse grupo, garante-se que dentre os alunos saudáveis em um dia, 90% ainda estarão saudáveis no dia seguinte e dentre os doentes, 60% ainda estarão doentes no dia seguinte.

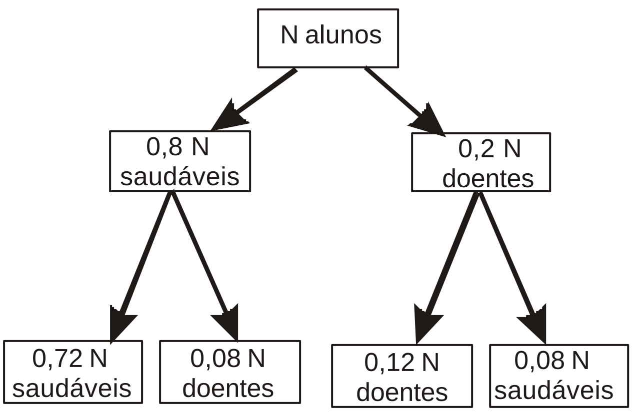
Considere a observação desse grupo de alunos em três dias consecutivos. Sabe-se que no primeiro dia 20% dos alunos estejam doentes.

a) Determine a porcentagem de alunos que ainda estarão doentes no segundo dia.

b) Escolhido um aluno ao acaso, no terceiro dia, determine a probabilidade de ele estar saudável.

Cálculos e respostas:

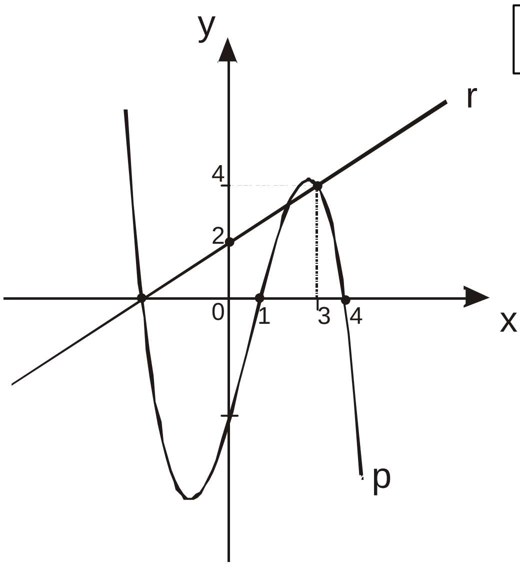
Consideremos um conjunto com N alunos



a) No segundo dia 12% dos alunos ainda estarão doentes.

b) Como a proporção se mantém, no terceiro dia 80% dos alunos estarão saudáveis e a probabilidade será de 80%.

3^{a} QUESTÃO: (2,0 pontos)



Os gráficos da função polinominal p e da reta r estão representados na figura ao lado.

a) Calcule o resto da divisão de p(x) por x – 3.

b) Escreva a equação de r.

c) Determine a expressão que define p, sabendo que as três únicas raízes de p são reais.

Cálculos e respostas:

a) O resto da divisão de p(x) por x – 3 é igual a p(3) = 4.

b) A reta r contém os pontos (0,2) e (3,4), logo sua equação é

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-0}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \frac{2}{3}x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + 2 \ \text{ ou } 3y - 2x = 6$$

b) A reta e o polinômio se interceptam em (-3, 0). Logo, as raízes de p são –3, 1 e 4.

Daí,

$$p(x) = a(x-1)(x+3)(x-4).$$

Mas p(3) = 4. Logo, $a(2)(6)(-1) = 4$ e $a = -\frac{1}{3}$.

Assim, $p(x) = -\frac{1}{3}(x-1)(x+3)(x-4)$.

$4^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & |x| < 4 \\ x^3, & |x| \geq 4 \end{cases}$$

Pede-se:

a) f(0)

b) (fof) (–2)

c) o valor de m tal que f(m) = – 125

d) $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

Cálculos e respostas:

a) f(0) = 0

b) (fof) (–2) = f [f (–2)] = f [– 8] = – 512

c) f(m) = – 125 $\Rightarrow$ m = – 5

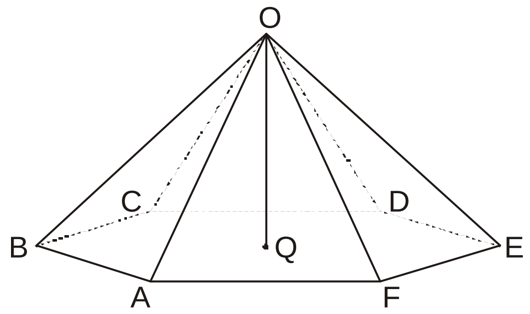
d) $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = a \quad \Rightarrow \quad f(a) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 4a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{16}$

Logo,

$$f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{16}\right)$$

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

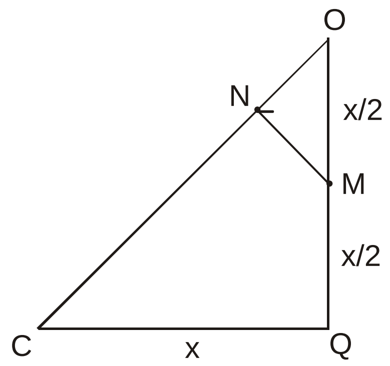
A figura mostra a pirâmide regular OABCDEF de base hexagonal cuja altura tem a mesma medida das arestas da base.



Pelo ponto médio M, da altura $\overline{OQ}$, traça-se o segmento $\overline{MN}$ perpendicular à aresta $\overline{OC}$.

Sabendo que $\overline{MN}$ mede 5 cm, determine o volume da pirâmide.

Cálculos e respostas:



$$\left(\overline{CO}\right)^2 = \left(\overline{OQ}\right)^2 + \left(\overline{CQ}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\overline{CO}^2 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{CO} = x\sqrt{2}$$

$$\Delta\ ONM \sim \Delta\ OQC$$

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{CQ}} \Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{x\sqrt{2}} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 10\sqrt{2}\text{cm}$$

Matemática - Gabarito – Grupos I e J

Cálculos e respostas:

O volume da pirâmide é dado por

$$V = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left(6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}\right)}_{\text{Área da base}} \underbrace{(x)}_{\text{altura}} = \frac{x^3\sqrt{3}}{2} = (10\sqrt{2})^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$V = 1000\sqrt{6}\ \text{cm}^3$