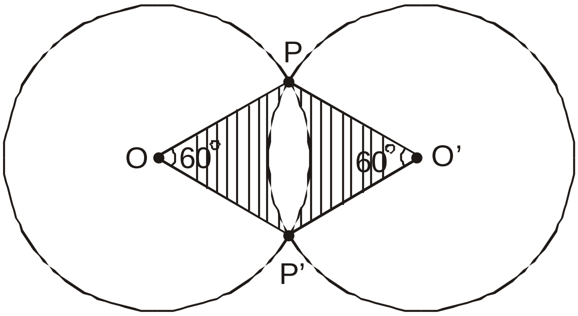
Matemática - Gabarito Grupo H

1ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

As circunferências de centro O e O' possuem, ambas, 1cm de raio e se interceptam nos pontos P e P', conforme mostra a figura.



Determine a área da região hachurada.

Cálculos e respostas:

Sejam
$A \rightarrow$ área da região hachurada
$A_S \rightarrow$ área do setor
$A_T \rightarrow$ área do triângulo OPP'

Temos,

$$A = 2\,(2A_T - A_S)$$

Mas $A_S = \pi.1^2.\dfrac{60}{360} = \dfrac{\pi}{6}$ e $A_T = \dfrac{\ell^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Logo,

$$A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \text{u.a.}$$

2ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Considere $\log_b \frac{1}{a} = x$, sendo $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Calcule o valor de $\log_a b^2$.

Cálculos e respostas:

Se $\log_b \frac{1}{a} = x$ então $b^x = a^{-1}$ e $a = b^{-x}$

Logo,

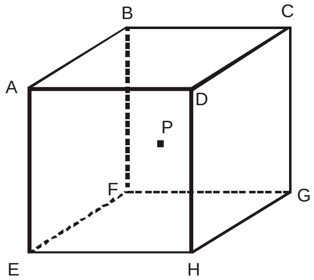
$\log a = -x \log b$

Daí,

$$\log_a b^2 = \frac{\log b^2}{\log a} = \frac{2 \log b}{-x \log b} = -\frac{2}{x}$$

3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

O cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H e o ponto P, que é centro deste cubo, estão representados na figura a seguir.

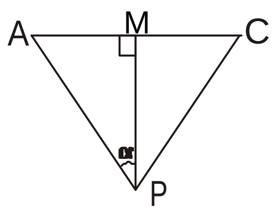


Considere o triângulo APC e calcule o seno do ângulo $\widehat{APC}$ **.**

Cálculos e respostas:

Indicamos a aresta do cubo por a e o ponto médio de $\overline{AC}$ por M.

$\widehat{APC} = 2\alpha$



Assim,

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$

$\overline{PM} = \dfrac{a}{2}$

$\overline{AP}$ é a metade da diagonal do cubo e vale $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

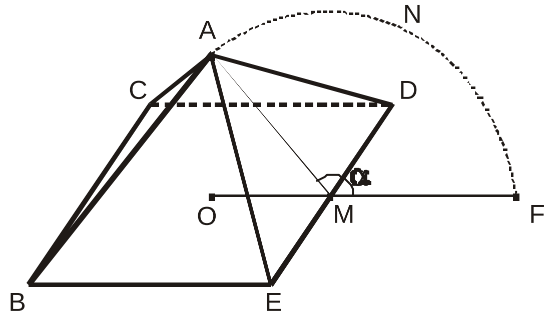
Temos $\cos\alpha = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{AP}} = \dfrac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AP}} = \dfrac{a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{3}/2} = \sqrt{6}/3$

$\operatorname{sen}(\widehat{APC}) = \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

$4^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (1,0 ponto)

Na figura, ABCDE é uma pirâmide regular reta, com $\sqrt{3}$ cm de altura, cuja base é um quadrado com 2 cm de lado e centro O, sendo M o ponto médio de $\overline{DE}$.



Ao longo do plano que passa por A, O e M, desloca-se o segmento $\overline{MA}$, descrevendo-se o arco $\overset{\frown}{ANF}$ que subentende o ângulo α.

Sabendo que F pertence ao plano da base da pirâmide, determine o comprimento do arco $\overset{\frown}{ANF}$.

Cálculos e respostas:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\frac{\overline{AO}}{\overline{OM}}=\frac{\sqrt{3}}{1} \quad \Rightarrow \quad \pi-\alpha=\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{2\pi}{3}\text{rad.}$$

O comprimento do arco $\overset{\frown}{ANF}$ é $\ell=\left(\overline{AM}\right).\,\alpha$

Mas, $\left(\overline{AM}\right)^2=\left(\overline{AO}\right)^2+\left(\overline{OM}\right)^2$.

Assim, $\overline{AM}^2=4$ e $\overline{AM}=2$.

Logo,

$$\ell=2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\text{cm.}$$

5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Em cada uma das duas urnas, U_1 e U_2, há, apenas, bolas brancas e azuis.
Sabe-se que 60% das bolas contidas em U_1 são brancas e que 50% das bolas contidas em U_2 são azuis.
As duas urnas juntas contêm 500 bolas, das quais 44% são azuis.
Determine quantas bolas há em cada urna.

Cálculos e respostas:

$$\begin{tikzcd} & 0{,}6x \ \text{brancas} \\ \text{urna } U_1 = x \text{ bolas} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0{,}4x \ \text{azuis} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & 0{,}5y \ \text{azuis} \\ \text{urna } U_2 = y \text{ bolas} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0{,}5y \ \text{brancas} \end{tikzcd}$$

$x + y = 500$

$0{,}4x + 0{,}5y = \frac{44}{\cancel{100}} \text{ x } \cancel{500} \quad \Rightarrow \quad 4x + 5y = 2200$

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 4x + 5y = 2200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 2000 \\ 4x + 5y = 2200 \end{cases} \Rightarrow y = 200 \quad \text{e} \quad x = 300$$

urna U_1 = 300 bolas

urna U_2 = 200 bolas

6ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Seja $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ um arco que satisfaz a equação

$$(1 + tg^2 x) \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Determine o valor de $\cos(3x)$.

Cálculos e respostas:

$$\left(1 + tg^2 x\right)\cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \sec^2 x \,.\, \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} \,.\, \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

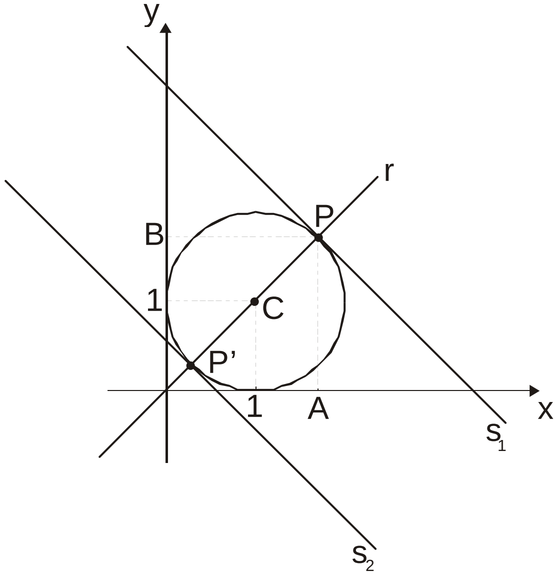
$$x = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Considere a circunferência C, de equação $(x – 1)^2 + (y – 1)^2 = 1$, e a reta r que contém a origem e o centro desta circunferência.

Encontre a equação de uma reta que seja perpendicular a r e tangente a C.

Cálculos e respostas:



Equação de r: y = x

Mas $s_1 \perp r$, logo $m_{s1} \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_{s1} = -1$

Assim, a equação de s_1 (ou s_2) é $y = - x + n$.

Também, $\overline{CP} = 1 \Rightarrow A - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow A = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $P(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $P'(1- \frac{\sqrt{2}}{2}, 1- \frac{\sqrt{2}}{2})$

Assim,

$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + n \Rightarrow n = 2 + \sqrt{2}$ ou

$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = - (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + n \Rightarrow n = 2 - \sqrt{2}$

Equação de $s_1 = y = - x + (2 + \sqrt{2})$

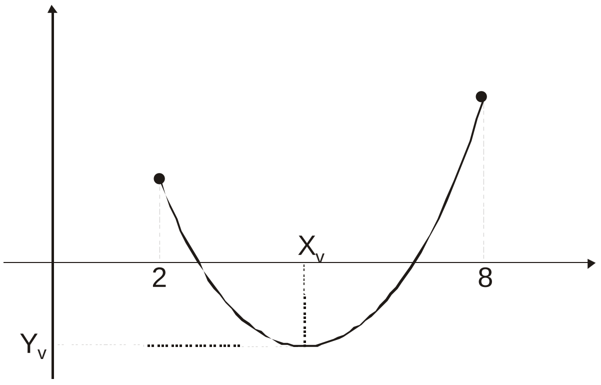
Equação de $s_2 = y = -x + (2 - \sqrt{2})$

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Seja a função f: $[2,8] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 9x + 18$. Considere os números u e v tais que f(u) e f(v) são, respectivamente, o maior e o menor valor que f assume.

Calcule a média aritmética entre f(u) e f(v).

Cálculos e respostas:



$x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 6$

ordenada do vértice: $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \dfrac{-9}{4}$

$f(2) = 2^2 - 9 \times 2 + 18 = 4$; $f(8) = 64 - 72 + 18 = 10$

Assim,

$f(u) = 10$ e $f(v) = \dfrac{-9}{4}$

Logo,

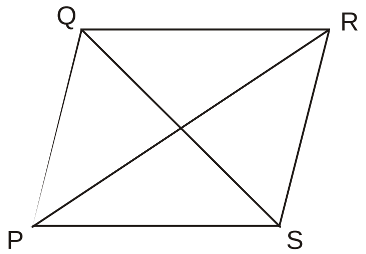
$$\frac{f(u) + f(v)}{2} = \frac{10 - \frac{9}{4}}{2} = \frac{31}{8}$$

9ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Considere os pontos P(2,3,2), Q(1,2,4) e R(2,1,–1). Determine as coordenadas de um ponto S tal que $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$ sejam as diagonais do paralelogramo PQRS.

Cálculos e respostas:

Seja S(x, y, z) o ponto procurado



$\vec{PQ} = \vec{SR} \Rightarrow (-1, -1, 2) = (2 - x, 1 - y, -1 - z) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2 - x = -1 \Rightarrow x = 3 \\ 1 - y = -1 \Rightarrow y = 2 \\ -1 - z = 2 \Rightarrow z = -3 \end{cases}$$

Logo, S (3, 2, – 3).

10ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Dada a função real de variável real f, definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$:

a) determine (fof) (x);

b) escreva uma expressão para $f^{-1}(x)$.

Cálculos e respostas:

a) $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1} = \dfrac{2x}{2} = x$

b) Se (fof) (x) = x então $f = f^{-1}$.

Logo,

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Matemática- Gabarito Grupo H