Gabarito – Matemática – Grupos I e J

1ª Questão: (2,0 pontos)

Considere os polinômios $p(x) = 2x^3 + 2x^2 + 7x - 1$ e $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

Calcule:

a) os valores do número complexo z tais que $p(z) = q(z)$;

b) o número real k e o polinômio do primeiro grau $r(x)$ tais que $p(x) = (x - k)\, q(x) + r(x)$.

Cálculos e respostas:

a) $p(z) = q(z)$ então

$$2z^3 + 2z^2 + 7z - 1 = 2z^2 - z - 1$$

$$2z^3 + 8z = 0 \iff 2z\,(z^2 + 4) = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z = 2i \text{ ou } z = -2i$$

b) $p(x) = (x - k)\, q(x) + r(x)$, onde $r(x) = ax + b$

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & -\;x & -\;1 \\ \times & & x & -\;k \\ \hline 2x^3 & -\;x^2 & -\;x & \\ & -2kx^2 & +\;kx & +\;k \\ \hline 2x^3 & -\;(1+2k)\,x^2 & +\;(k-1)x & +\;k \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & -\;(1+2k)\,x^2 & +\;(k-1)x & +\;k \\ + & & ax & +\;b \\ \hline 2x^3 & -\;(1+2k)\,x^2 & +\;(k-1+a)x & +\;(k+b) \end{array}$$

Então,

$$-(1 + 2k) = 2 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$k - 1 + a = 7 \Rightarrow a = \frac{19}{2}$$

$$k + b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$k = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad r(x) = \frac{19\,x}{2} + \frac{1}{2}.$$

G a b a r i t o – M a t e m á t i c a – G r u p o s I e J

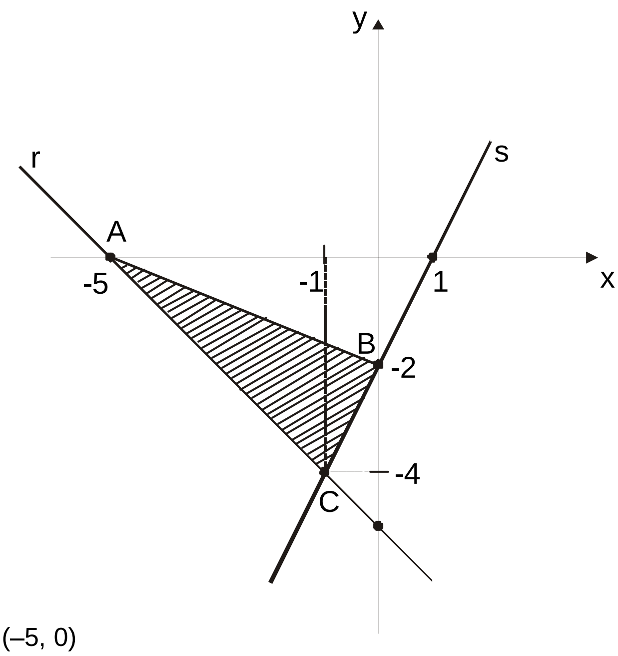
2ª Questão: (2,0 pontos)

Com relação ao triângulo ABC sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo das abcissas;
- o ponto B pertence ao eixo das ordenadas;
- a equação da reta que contém os pontos A e C é $x + y + 5 = 0$;
- a equação da reta que contém os pontos B e C é $2x - y - 2 = 0$.

Determine as coordenadas dos pontos A, B e C.

Cálculos e respostas:



r: $x + y + 5 = 0$

s : $2x - y - 2 = 0$

A (–5, 0)

B (0, –2)

C é o ponto de interseção de r e s

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

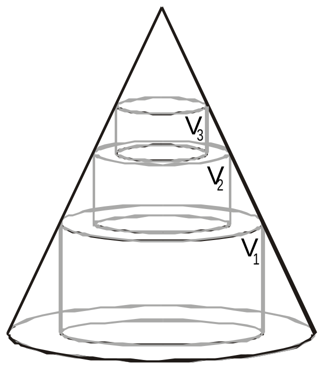
$3x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \text{e} \quad y = -4$

C (–1, –4)

G a b a r i t o – M a t e m á t i c a – G r u p o s I e J

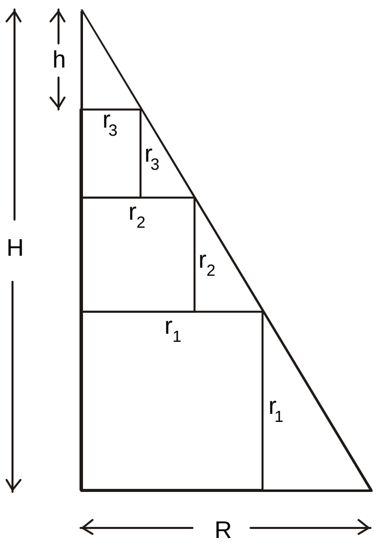
3ª Questão: (2,0 pontos)

A figura representa um cone de volume 36 π cm^3 contendo três cilindros cujos volumes V_1, V_2 e V_3 estão, nesta ordem, em progressão geométrica de razão $\frac{1}{27}$.



Sabe-se que cada um dos cilindros tem a altura igual ao raio de sua base. Determine o raio da base do cone.

Cálculos e respostas:



$$\frac{H}{R} = \frac{r_3}{r_2 - r_3}$$

Mas

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{27}$$

Logo,

$$\frac{(r_3)^3}{(r_2)^3} = \frac{1}{27} \Rightarrow r_2 = 3r_3$$

$$\frac{H}{R} = \frac{r_3}{2r_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow H = \frac{R}{2}$$

Volume do cone = 36π cm^3 $= \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi R^2 . R}{6} = \frac{\pi R^3}{6}$

R = 6 cm

Gabarito – Matemática – Grupos I e J

$4^{\underline{a}}$ Questão: (2,0 pontos)

Dada a função real de variável real f tal que $f(2x+1) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$, determine:

a) a expressão de f(x);

b) o domínio da função f.

Cálculos e respostas:

Consideremos y = 2x + 1

Logo, $x = \dfrac{y-1}{2}$

Assim,

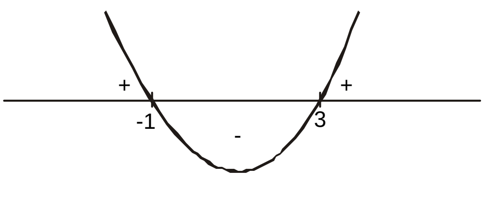
$$f(y) = \frac{y-1}{\sqrt{\dfrac{(y-1)^2}{4} - 1}} = \frac{2(y-1)}{\sqrt{y^2 - 2y - 3}}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$



a) $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

b) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Gabarito – Matemática – Grupos I e J

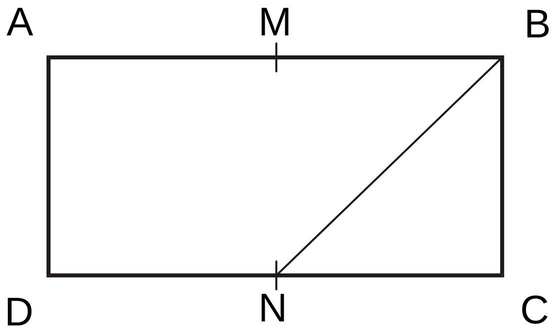
5ª Questão: (2,0 pontos)

Em um retângulo ABCD, M e N são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Tem-se que $\overrightarrow{BM} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ e $\overrightarrow{BN} = \left(2\sqrt{3}, -2\right)$.

Determine o perímetro do retângulo.

Cálculos e respostas:



$$\left\| \overrightarrow{BM} \right\| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\left\| \overrightarrow{BN} \right\| = \sqrt{4.3+4} = 4$$

Mas, $\left\| \overrightarrow{BN} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BM} \right\|^2$

$$\left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow \left\| \overrightarrow{MN} \right\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = 2\left\| \overrightarrow{BM} \right\| = 2 \;.\; 2 = 4$$

Assim, $\overline{AB} = \overline{DC} = 4$ e $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{MN} = 2\sqrt{3}$

Perímetro = $4 + 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3}$ u.c.