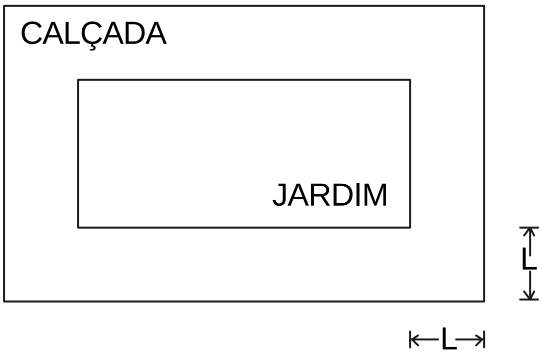
G a b a r i t o – M a t e m á t i c a – G r u p o H

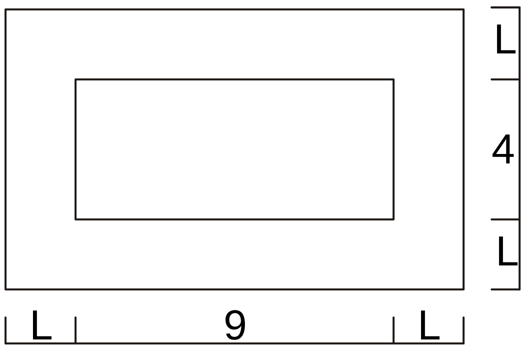
1ª Questão: (1,0 ponto)

Num terreno retangular com 104 m^2 de área, deseja-se construir um jardim, também retangular, medindo 9 m por 4 m, contornado por uma calçada de largura L, como indica a figura.



Calcule o valor de L.

Cálculos e resposta:



$(4 + 2L)\,(9+2L) = 104$
$36 + 8L + 18L + 4L^2 = 104$
$4L^2 + 26L - 68 = 0$
$2L^2 + 13L - 34 = 0$

$$L = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 272}}{4} \quad \begin{cases} 2 \\ -\dfrac{34}{4} \end{cases}$$

L = 2 m

Gabarito – Matemática – Grupo H

2ª Questão: (1,0 ponto)

Considere os vetores $\vec{u} = (0, -2)$ e $\vec{v} = (-1, 0)$.

Determine um vetor unitário $\vec{w}$ tal que os vetores $(\vec{u} + \vec{w})$ e $(\vec{v} + \vec{w})$ sejam perpendiculares.

Cálculos e resposta:

$\vec{u} = (0, -2)$ $\quad \vec{v} = (-1, 0)$ $\quad \vec{w} = (a,b)$

$\vec{u} + \vec{w} = (a, -2 + b)$ $\quad \|\vec{w}\| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

$\vec{v} + \vec{w} = (-1 + a, b)$

$(\vec{u} + \vec{w}) \perp (\vec{v} + \vec{w}) \Rightarrow (\vec{u} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 0$

então :

$a(a - 1) + (b - 2)b = 0$

$a^2 - a + b^2 - 2b = 0$

$1 - a - 2b = 0$

$a = 1 - 2b$

$a^2 + b^2 = 1$

$(1 - 2b)^2 + b^2 = 1$

$1 - 4b + 4b^2 + b^2 = 1$

$5b^2 - 4b = 0$

$b(5b - 4) = 0$

$b = 0$ ou $b = 4/5 \Rightarrow a = 1$ ou $a = -3/5$

$\vec{w} = (1,0)$ ou $\vec{w} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

G a b a r i t o – M a t e m á t i c a – G r u p o H

3ª Questão: (1,0 ponto)

Um biscoito é composto por açúcar, farinha de trigo e manteiga, sendo a quantidade de farinha o dobro da quantidade de açúcar. Os preços por quilograma do açúcar, da farinha e da manteiga são, respectivamente, R$ 0,50, R$ 0,80 e R$ 5,00. O custo por quilograma de massa do biscoito, considerando apenas esses ingredientes, é R$ 2,42.

Calcule a quantidade, em gramas, de cada ingrediente presente em 1 kg de massa do biscoito.

Cálculos e resposta:

x $\longrightarrow$ **quantidade de açúcar por kg de biscoito**

y $\longrightarrow$ **quantidade de farinha por kg de biscoito**

z $\longrightarrow$ **quantidade de manteiga por kg de biscoito**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 2x \\ 0{,}50x + 0{,}80y + 5{,}00z = 2{,}42 \end{cases}$$

$x + 2x + z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 1 - 3x$

$0{,}50x + 0{,}80(2x) + 5{,}00(1 - 3x) = 2{,}42$

$0{,}50x + 1{,}60x + 5{,}00 - 15x = 2{,}42$

$-12{,}90x = 2{,}42 - 5{,}00$

$-12{,}90x = -2{,}58$

$$x = \frac{2{,}58}{12{,}90} = \frac{258}{1290} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$y = 2x = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$

$z = 1 - 3x = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Açúcar 200g

Farinha 400g

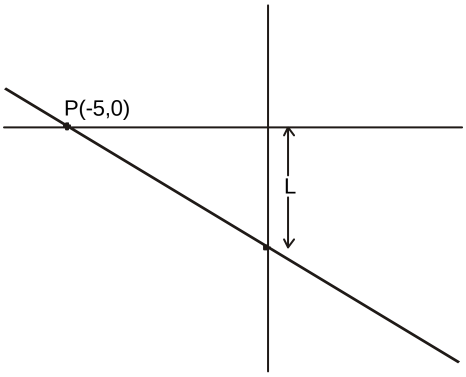
Manteiga 400g

4ª Questão: (1,0 ponto)

A reta r contém o ponto P(-5, 0), tem coeficiente angular negativo e forma, com os eixos coordenados, um triângulo de área igual a 20.

Determine a equação de r.

Cálculos e resposta:



Equação da reta

$y = ax + b$

$0 = -5a + b \quad \Rightarrow \quad 5a = b$

$$\frac{L \times 5}{2} = 20 \quad \Rightarrow \quad L = 8$$

Logo, a reta contém o ponto $(0, -8)$

Assim,

$-8 = b$

e

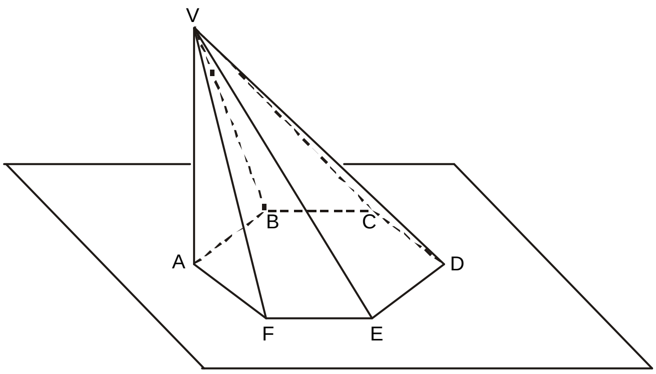
$$a = -\frac{8}{5}$$

A equação da reta é $y = -\frac{8}{5}x - 8$

Gabarito – Matemática – Grupo H

5ª Questão: (1,0 ponto)

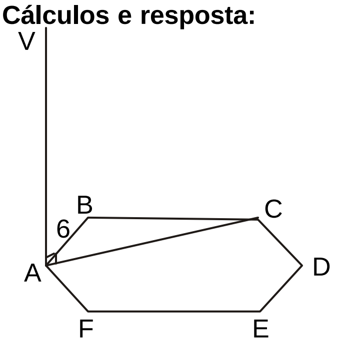
O hexágono regular ABCDEF é base da pirâmide VABCDEF, conforme a figura.



A aresta $\overline{VA}$ é perpendicular ao plano da base e tem a mesma medida do segmento $\overline{AD}$. O segmento $\overline{AB}$ mede 6 cm.

Determine o volume da pirâmide VACD.

Cálculos e resposta:



$\overline{VA} \perp$ plano da base

$\overline{VA} = \overline{AD}$ = Altura da pirâmide VACD = 12

Volume da pirâmide = $\dfrac{\text{Área da base} \times \overline{VA}}{3}$

Área da base = $\dfrac{\overline{CD} \times h}{2}$, sendo h = $\overline{AC}$, pois o triângulo ACD é retângulo em C.

Cálculo de h:

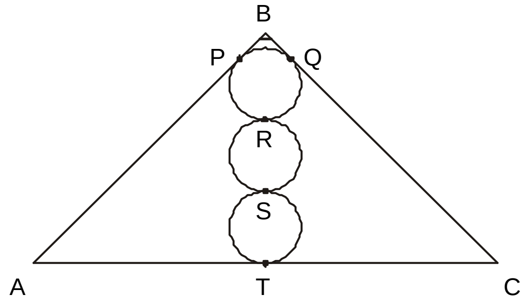
$h = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

Volume = $\dfrac{18\sqrt{3} \times 12}{3} = 72\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

G a b a r i t o – M a t e m á t i c a – G r u p o H

6ª Questão: (1,0 ponto)

A figura representa três círculos idênticos no interior do triângulo retângulo ABC.

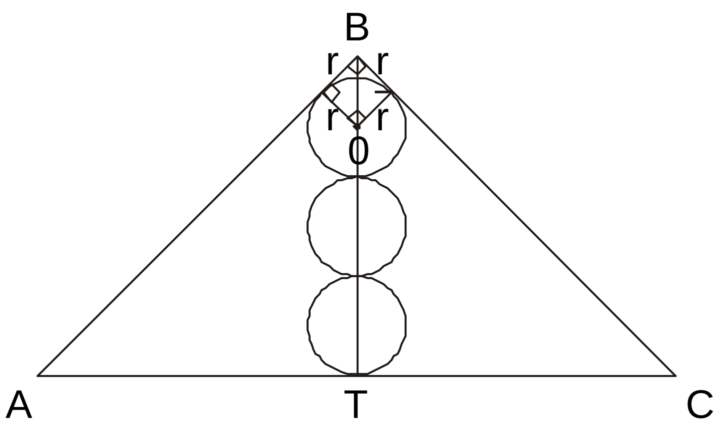


Tem-se que:

- A soma das áreas dos três círculos é $6\pi\ \text{cm}^2$;
- P, Q, R, S e T são pontos de tangência;
- $\overline{BT}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

Determine a medida do segmento $\overline{BC}$.

Cálculos e resposta:



$$\overline{BO}^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

$$\overline{BO} = r\sqrt{2}$$

Logo

$$\overline{BT} = 5r + r\sqrt{2}$$

Mas $3\pi r^2 = 6\pi \Rightarrow r = \sqrt{2}$

Gabarito – Matemática – Grupo H

Cálculos e resposta:

Logo,

$\overline{BT} = 2 + 5\sqrt{2}$

Mas

$\overline{BT} = \overline{CT}$, pois BTC é retângulo em T e semelhante ao ABC que é isósceles, com $\overline{BC} = \overline{AB}$ e $\overline{BC}^2 = 2\overline{BT}^2$

$\Rightarrow \quad \overline{BC}^2 = 2\,(2 + 5\sqrt{2}\,)^2$

$\Rightarrow \quad \overline{BC} = (2 + 5\sqrt{2})\,\sqrt{2} = 10 + 2\sqrt{2}$ cm

Gabarito – Matemática – Grupo H

7ª Questão: (1,0 ponto)

São dados os números reais positivos a, b e x tais que $a \neq 1$ e $b \neq 1$.

Sabe-se que $\log_a x = 2$ e $\log_b x = 4$.

Calcule $\log_{ab} a\sqrt{x}$.

Cálculos e resposta:

$$\log_{ab} a\sqrt{x} = \frac{\log_a a\sqrt{x}}{\log_a ab} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}\log_a x}{1 + \log_a b}$$

Mas $a^2 = x$ e $b^4 = x$. Assim $a^2 = b^4$ e $b^2 = a \Rightarrow b = \sqrt{a}$

Logo

$$\log_{ab} a\sqrt{x} = \frac{1 + \frac{1}{2}.2}{1 + \log_a \sqrt{a}} = \frac{1+1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

Gabarito – Matemática – Grupo H

8ª Questão: (1,0 ponto)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 3x + 2$ e a função real de variável real f definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{p(x)}}$.

Sabe-se que uma das raízes de p(x) é 1.

Escreva o domínio de f sob a forma de intervalo.

Cálculos e resposta:

$p(1) = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$p(x) = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2 (x + 2)$

$\text{Dom } f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, p(x) > 0 \}$

Assim,

$(x - 1)^2 (x+2) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2) > 0 \text{ e } x \neq 1 \Rightarrow \quad x > -2 \quad \text{e} \quad x \neq 1$

Logo

$\text{Dom } f = (-2, 1) \cup (1, +\infty)$

G a b a r i t o – M a t e m á t i c a – G r u p o H

9^a Questão: (1,0 ponto)

Dados os ângulos α e β tais que α, $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resolva a equação:

$\operatorname{sen}(x - \alpha) = \operatorname{sen}(x - \beta)$

Cálculos e resposta:

$\operatorname{sen}(x - \alpha) = \operatorname{sen}(x - \beta)$

$\operatorname{sen} x \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos x = \operatorname{sen} x \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos x$

$\operatorname{sen} x (\cos\alpha - \cos\beta) = \cos x (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)$

mas $\alpha, \beta, x \in [0, \pi/2]$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$

Assim,

$$\operatorname{sen} x \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = \cos x \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$\operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = K\pi - \frac{\pi}{4}$, $K \in \mathbb{Z}$

Gabarito – Matemática – Grupo H

10ª Questão: (1,0 ponto)

Numa progressão aritmética, de termo geral a_n e razão r, tem-se $a_1 = r = \frac{1}{2}$.

Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_5 & a_4 \\ a_4 & a_{12} \end{bmatrix}$.

Cálculos e resposta:

Seja M = $\begin{bmatrix} a_5 & a_4 \\ a_4 & a_{12} \end{bmatrix}$

det M = $a_5 \cdot a_{12} - (a_4)^2$

Mas $a_1 = r = \frac{1}{2}$ e $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Assim,

$a_4 = 2$, $a_5 = \frac{5}{2}$, $a_{12} = 6$

Logo, det M = 11.

Gabarito – Matemática – Grupo H