PROGRAD / COSEAC – ENGENHARIAS MECÂNICA E PRODUÇÃO – VOLTA REDONDA - GABARITO

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Determine os valores de **m** e **n** para os quais a função dada seja contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-4x+1}{x-1} & , \quad x<1 \\ x^2+mx+n & , \quad 1\le x\le 4 \\ -x+6 & , \quad x>4 \end{cases}$$

Cálculos e Resposta:

f é contínua em $x=1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2-4x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(3x-1)(x-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} 3x-1 = 2.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2+mx+n = 1+m+n.$$

$$1+m+n=2$$
$$\Rightarrow \quad m+n=1 \qquad \dots(\theta)$$

f é contínua em $x=4$: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} x^2+mx+n = 16+4m+n.$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} -x+6 = 2 \text{ Obtemos}$$

$$16+4m+n=2$$
$$\Rightarrow \quad 4m+n=-14 \qquad \dots(\beta)$$

Resolvendo equações (θ) e (β):

Resposta: $m=-5$ e $n=6$.

$2^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (1,0 ponto)

Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função

$$f(x,y) = \frac{xy^2 - x^3y}{x^2 + y^2}$$

no ponto (1,1,0).

Cálculos e Resposta:

$$f(x,y) = \frac{xy^2 - x^3y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^2 - 3x^2y)(x^2+y^2) - (xy^2 - x^3y)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2y^2 - x^4y - 3x^2y^3 + y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(2xy - x^3)(x^2+y^2) - (xy^2 - x^3y)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3y + x^3y - x^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}.$$

h

Plano tangente:

$$z = f(1,1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\right](x-1) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right](y-1)$$

$$z = 0 - (x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

$$\text{Rpta: } \quad 2x - y + 2z = 1 \quad (\text{Plano tangente})$$

3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Calcule a integral dupla $\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$, onde $f(x,y) = y + xy$ e T é o triângulo de vértices (0,0), (1,1) e (2,0).

Cálculos e Resposta:

Triângulo T de vértices (0,0), (1,1), (2,0):

Considerando T como região tipo II,

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \le y \le 1 \,, y \le x \le 2 - y\}$.

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_y^{2-y} (y + xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (xy + \frac{x^2 y}{2}) \Big]_y^{2-y} \,dy$$

$$= \int_0^1 \left((2-y)y + \frac{(2-y)^2 y}{2} - y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \int_0^1 (4y - 4y^2)\,dy$$

$$= \left(2y^2 - \frac{4y^3}{3} \right) \Big]_0^1 = 2 - \frac{4}{3}$$

Rpta. $\frac{2}{3}$

4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Encontre os autovalores da matriz A e, para cada autovalor, determine uma base do espaço de autovetores associados ao autovalor.

Considerando esses aspectos, diga se a Matriz A é diagonalizável? Justifique.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculos e Resposta:

- Autovalores da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1) - 3(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2-4) \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda+2) \end{aligned}$$

Autovalores: $\lambda = 2$ (multiplicidade algébrica 2)

$\lambda = -2$ (multiplicidade algébrica 1)

Autovetores:

▫ $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & -3 & -1 \\ 0 & 2+1 & -1 \\ 0 & -3 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -3y - z &= 0 \\ -3y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad -6y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Cálculos e Resposta:

$\beta_1 = \{(1,0,0)\}$ é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 2$.

◘ $\lambda = -2$:

$$\begin{bmatrix} -2-2 & -3 & -1 \\ 0 & -2+1 & -1 \\ 0 & -3 & -2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = \{(1,-2,2)\}$ é uma base do autoespaço associado a $\lambda = -2$.

◘ A não é diagonalizável já que não podemos encontrar uma base para R^3 formada por autovetores de A. No máximo encontramos 2 autovetores

5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Sejam as retas

$r:(x,y,z)=(1+2t,2-3t,-1+4t),\ t\in \mathbb{R}$

$s:(x.y.z)=(5+t,-4+2t,7-3t),\ t\in \mathbb{R}$

a) As retas r e s são paralelas? Justifique.
As retas r e s são concorrentes? Justifique.
As retas r e s são reversas? Justifique.

b) Caso as retas r e s sejam paralelas ou concorrentes, encontre a equação do plano que contém ambas as retas.
Caso as retas r e s sejam reversas, calcule a distância entre as retas.

Cálculos e Resposta:

$u=(2,-3,4)$ é vetor diretor da reta r.

$v=(1,2,-3)$ é vetor diretor da reta s.

Observamos que os vetores diretores das retas não são paralelos, então as retas não são paralelas. Usaremos fórmula de distância entre retas para saber se são concorrentes ou reversas.

$d(r,s)=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\bullet(u\times v)|}{\|u\times v\|}$, $P\in r,\ Q\in s$. Escollhemos $(1,2,-1)\in r$ e $(5,-4,7)\in s$.

Logo, $d(r,s)=0$. Portanto, as RETAS são CONCORRENTES.

● Cálculo da equação cartesiana do plano que contém as retas concorrentes:

$\vec{n}=u\times v=(1,10,7)$ é um vetor normal do plano que contém as retas.

Equação cartesiana: x+10y+7z=d

(1,2,-1) pertence ao plano, então d=14. Logo,

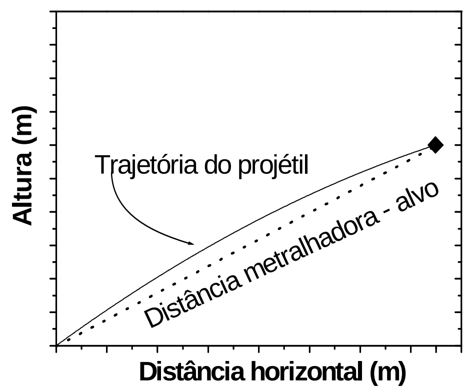
a equação do plano que contém as retas concorrentes r e s:

$$x+10y+7z=14.$$

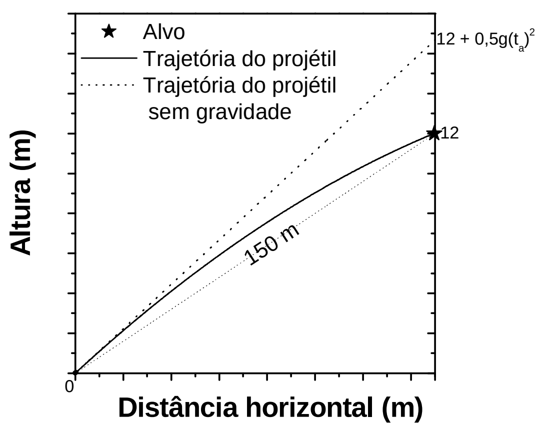
6ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Uma metralhadora dispara um projétil com uma velocidade de 220 m/s.

Calcule o ângulo de disparo para que o projétil atinja um alvo que está a 12 m de altura do solo e a 150 m de distância (distância metralhadora - alvo).



Cálculos e Resposta:



LEGENDA

x_a: coordenada x do alvo;
t_a: Intervalo de tempo para o projétil atingir o alvo a partir de $t = 0$.
h: coordenada y do alvo;
v_o: velocidade inicial;

CONSIDERAÇÕES

$h = 12$ m
$x_a = 148{,}1$ m
$v_o = 220$ m/s
$g = 10{,}0$ m/s^2

$$tg(\alpha_0) = \frac{\left(h + 0{,}5gt_a^2\right)}{x_a} \quad (1)$$

$$x_a = v_0 \cos(\alpha_0) t_a \Rightarrow t_a = \frac{x_a}{v_0 \cos(\alpha_0)} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1)

$$tg(\alpha_0) = \frac{h}{x_a} + \frac{g x_a}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha_0)} \quad (3)$$

Cálculos e respostas:

Usando que $sec^2(\alpha_0) = 1 + tg^2(\alpha_0)$

$$tg^2(\alpha_0) - \frac{2v_0^2}{gx_a} tg(\alpha_0) + \frac{2hv_0^2}{gx_a^2} + 1 = 0 \quad (4)$$

Resolvendo (4) para $tg(\alpha_0)$, encontramos:

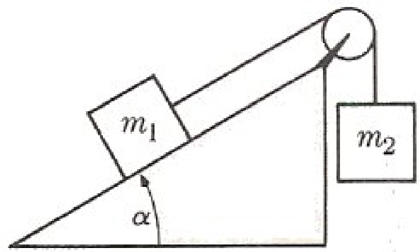
$$tg(\alpha_0) = \frac{v_0^2}{gx_a} \pm \left(\frac{v_0^2}{g^2 x_a^2}(v_0^2 - 2gh) - 1 \right)^{1/2} \quad (5)$$

Resolvendo (5) para α_0, encontramos:

$$\alpha_0 = 5{,}5^\circ$$

7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

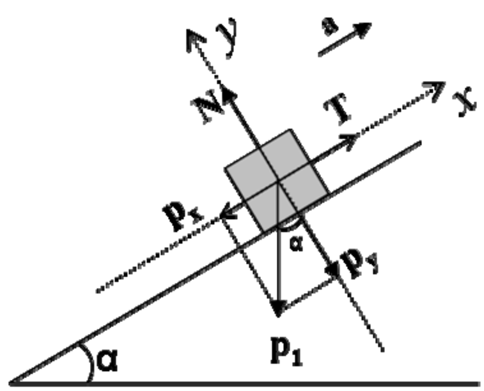
Admitindo que não haja atrito no sistema representado abaixo e que m_1 = 200g, m_2 = 180g e α = 30º, calcule a aceleração com a qual os corpos movem-se, bem como a tensão no fio.



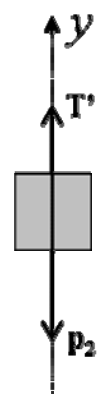
Cálculos e Resposta:

OBS.: Quantidades em negrito são vetores.

CORPO 1



CORPO 2



CORPO 1

Princípio da superposição: $\mathbf{p_1} = \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y$

2ª Lei de Newton:

$$\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y + \mathbf{T} + \mathbf{N} = m_1\mathbf{a}_1 \longrightarrow -m_1 g \,\text{sen}(\alpha)\mathbf{i} - m_1 g\cos(\alpha)\mathbf{j} + T\mathbf{i} + N\mathbf{j} = m_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{i}$$

CORPO 2

2ª Lei de Newton:

$$\mathbf{p} + \mathbf{T'} = m_2\mathbf{a}_2 \longrightarrow T\mathbf{j} - m_2 g\mathbf{j} = -m_2\mathbf{a}_2\mathbf{j}$$

Consideração: $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = a$ e $|\mathbf{T}| = |\mathbf{T'}| = T$

Cálculos e respostas:

Corpo 1:

Em y: $N = m_1 g\, cos(\alpha)$

Em x: $a = \dfrac{T - m_1 g sen(\alpha)}{m_1}$ (1)

Corpo 2:

Em y: $a = \dfrac{m_2 g - T}{m_2}$ (2)

Igualando (1) com (2)

$$T = g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + sen(\alpha)) \quad (3) \qquad T = 1{,}4N$$

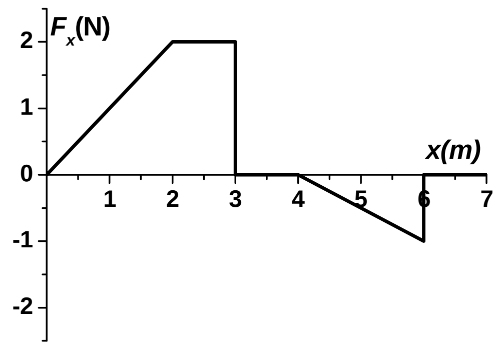
Substituindo (3) em (2):

$$a = \frac{(m_2 - m_1 sen(\alpha))}{m_1 + m_2} g \qquad a = 2{,}1\, m/s^2$$

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Uma força **F** é aplicada paralelamente ao eixo O*x* a um carrinho de controle remoto, cuja massa é de 2,00 kg. A componente *x* da força, F_x, varia com a coordenada *x* do carrinho, conforme indicado na figura abaixo.

Calcule os trabalhos realizados pela força **F** quando o carro se desloca de *x* = 0 a *x* = 7m e de *x* = 7m a *x* = 2m.



Cálculos e Resposta:

$$m = 2{,}0\ kg$$
$$W_{0-7m} = W_{0-2m} + W_{2m-3m} + W_{3m-4m} + W_{4m-6m} + W_{6m-7m} = 2J + 2J + 0 - 1J + 0 = 3J$$
$$W_{0-7m} = 3J$$

$$W_{7m-2m} = -W_{2m-7m} = -(2J - 1J) = -J$$
$$W_{7m-2m} = -1J$$

9ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

A energia potencial entre dois átomos em uma molécula diatômica é dada por $U(r) = a/r^{12} - b/r^6$, onde r é a distância entre os átomos e a e b são constantes positivas. Considerando isso:

a) Determine a força F(r) que um átomo exerce sobre o outro em função de r.
b) Determine a distância entre os átomos para que haja equilíbrio e diga se esse equilíbrio é estável.

Cálculos e Resposta:

a) $F(r) = -\frac{d}{dr}U(r) = 12ar^{-13} - 6br^{-7}$

b) Distância de equilíbrio $\longrightarrow$ $F = 0$ *e* $r = r_o$

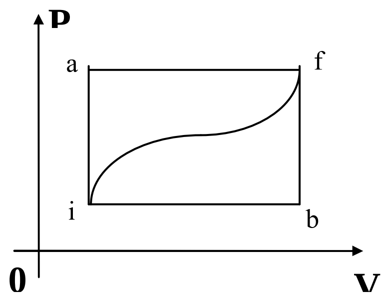
$$12ar^{-13} - 6br^{-7} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_o = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

$U''(r_o) > 0$ r_o é ponto de mínimo de $U(r)$, de modo que o equilíbrio é ESTÁVEL.

10ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Quando se leva o sistema do estado *i* ao estado *f* ao longo do trajeto *iaf* (veja figura abaixo), descobre-se que Q= 60 J e W=25J. Além disso, considere-se, ao longo do trajeto *ibf*, Q= 40J.

a) Qual o valor de W ao longo do trajeto *ibf*?
b) Se W=-15J para o caminho curvo *fi* de retorno, quanto vale Q para esse trajeto?
c) Considerando-se $E_{int,i}$ = 10J, quanto vale $E_{int,f}$?
d) Se $E_{int,b}$=25J, encontre Q para o processo *ib* e *bf.*



Cálculos e respostas:

$Q_{iaf} = 60J \quad Q_{ibf} = 40J \quad W_{iaf} = 25J$

a) 1ª Lei da Termodinâmica: $\Delta E_{int} = Q - W$

$$\Delta E_{int}^{if} = Q_{iaf} - W_{iaf} = 60 - 25 = 35J$$

$$\Delta E_{int}^{if} = Q_{ibf} - W_{ibf} \quad \Rightarrow \quad 35J = 40 - W_{ibf} \quad \Rightarrow \quad W_{ibf} = 40J - 35J \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{ibf} = 5J}$$

b) $W_{fci} = -15J \quad \Rightarrow \quad W_{icf} = 15$

$$\Delta E_{int}^{if} = 35J \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{int}^{if} = Q_{icf} - W_{icf} \quad \Rightarrow \quad 35J = Q_{icf} - W_{icf}$$

$$Q_{icf} = 35J + W_{icf} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{icf} = 50J}$$

c) $E_{int\,i} = 10J$

$$\Delta E_{int} = 35J \quad \Rightarrow \quad E_{int\,f} - E_{int\,i} = 35J \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{int\,f} = 45J}$$

d) $E_{int\,b} = 25J$

$$\Delta_{int}^{ib} = Q_{ib} - W_{ib} \quad \Rightarrow \quad E_{int\,b} - E_{int\,i} = Q_{ib} - W_{ib} \quad \Rightarrow \quad Q_{ib} = E_{int\,b} - E_{int\,i} + W_{ib}$$

$$\boxed{Q_{ib} = 20J}$$

$$Q_{ibf} = 40J \quad \Rightarrow \quad Q_{ib} + Q_{bf} = 40J \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{bf} = 20J}$$