UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TRANSFERÊNCIA – 2º semestre letivo de 2010 e 1º semestre letivo de 2011

CURSO de ESTATÍSTICA – Gabarito

INSTRUÇÕES AO CANDIDATO

- Verifique se este caderno contém:
  PROVA DE **REDAÇÃO** – com uma proposta;
  PROVA DE **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS –** com questões discursivas, totalizando dez pontos.
- Se este caderno não contiver integralmente o descrito no item anterior, notifique imediatamente ao fiscal.
- No espaço reservado à identificação do candidato, além de assinar, preencha o campo respectivo com seu nome.
- Não é permitido fazer uso de instrumentos auxiliares para o cálculo e o desenho, portar material que sirva para consulta nem equipamento destinado à comunicação.
- Na avaliação do desenvolvimento das questões será considerado somente o que estiver escrito a caneta, com tinta azul ou preta, nos espaços apropriados.
- O tempo disponível para realizar as provas é de quatro horas.
- Ao terminar, entregue ao fiscal este caderno devidamente assinado. Tanto a falta de assinatura quanto a assinatura fora do local apropriado poderá invalidar sua prova.
- Certifique-se de ter assinado a lista de presença.
- Colabore com o fiscal, caso este o convide a comprovar sua identidade por impressão digital.
- Você deverá permanecer no local de realização das provas por, no mínimo, noventa minutos.

AGUARDE O AVISO PARA O INÍCIO DA PROVA

RESERVADO À IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

NOME

ASSINATURA : ______________________

RESERVADO AOS AVALIADORES

REDAÇÃO			rubrica: ____________
C. ESPECÍFICOS			rubrica: ____________

PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Resolva no conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais:

a) $\dfrac{x^3(x-1)^2 - 2x^2(x-1)}{-x^2 + x - 4} > 0$

b) $2\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

Cálculos e respostas:

a)

Observe que

$$\frac{x^3(x-1)^2 - 2x^2(x-1)}{-x^2+x-4} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)[x(x-1)-2]}{-x^2+x-4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)[x^2-x-2]}{-x^2+x-4} > 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x^2-x-2) < 0 \ ,$$

pois $-x^2 + x - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, já que $\Delta = 1 - 4(-1)(-4) = -15 < 0$ e a concavidade da parábola $y = -x^2 + x - 4$ é para baixo. Analisando o sinal de cada fator ($x^2, x-1$ e $x^2 - x - 2$) da última expressão acima e fazendo o produto desses sinais, obtem-se o conjunto solução da inequação $S = (-\infty, -1) \cup (1,2)$.

b) $2\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

Observe que, usando a identidade trigonométrica fundamental $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$,
a equação dada é equivalente a $2sen^2\theta + 3sen\theta - 2 = 0$. Fazendo uma mudança de variável, a saber, $y = sen\theta$, obtem-se na nova variável y a equação do segundo grau $2y^2 + 3y - 2 = 0$, cujas raízes são $y = -2$ ou $y = \frac{1}{2}$. Retornando à variável θ , tem-se que

(1) $sen\theta = -2$ ou (2) $sen\theta = \frac{1}{2}$.

Note que a equação (1) não possui solução, já que $-1 \le \operatorname{sen}\theta \le 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$. A equação (2) tem como conjunto solução, que também será o conjunto solução da equação dada inicialmente, $S = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \ ; \ \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Esboce o gráfico de cada função real.

a) $f(x) = x\,|\,x - 2\,|$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

Cálculos e respostas:

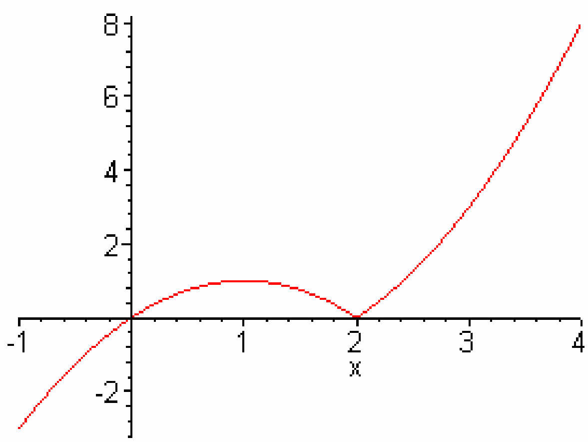
a) $f(x) = x\,|\,x - 2\,|$.

O domínio da f é ¡ e como $|\,x-2\,| = \begin{cases} x-2 & se\ x \geq 2 \\ 2-x & se\ x < 2 \end{cases}$, obtem-se (1) .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & se\ x \geq 2 \\ 2x - x^2 & se\ x < 2 \end{cases}$$

Logo, o gráfico da função f é formado pela união das duas partes das parábolas descritas em (1), cujo esboço segue abaixo.

y=f(x)



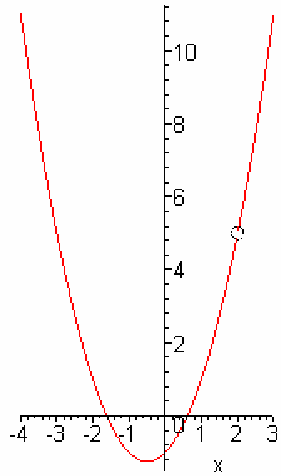
Cálculos e respostas:

b)

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

Inicialmente, note que o domínio da função f é $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e que x=2 é raiz do polinômio presente em seu numerador, logo o numerador pode ser fatorado como $x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x^2 + x - 1)$. Assim, $f(x) = x^2 + x - 1$, $\forall x \in D$ e, portanto, o gráfico da f consiste da parábola $y = x^2 + x - 1$, menos o ponto (2,5), como mostra a figura a seguir.

y=f(x)



3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

PROAC / COSEAC - Gabarito

Os dados na tabela de frequências abaixo representam a taxa de colesterol (mg/dL) em 80 indivíduos.

Intervalos de colesterol (mg/dL)	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. relativa acumulada
50 |— 100	4	0,05	
100 |— 150	20	0,25	
150 |— 200	40	0,50	
200 |— 250	12	0,15	
250 |— 300	4	0,05	
TOTAL			

Considere as taxas de colesterol da tabela acima e responda às questões.

a) Complete a tabela e encontre o 1º quartil e o 3º quartil.

b) Encontre as taxas de colesterol média e mediana. A diferença encontrada é indicativa de algum comportamento anormal nos dados coletados? Justifique.

c) Taxas de colesterol acima de 225mg/dL exigem um tratamento especial. Qual percentual esperado da amostra receberia esse tratamento?

d) Podem existir, nesses dados, valores que podem ser classificados como discrepantes? Justifique.

Cálculos e respostas:

a) Para completar a tabela, precisaria apenas completar a coluna referente à Frequência relativa acumulada e a linha correspondente ao Total das colunas apresentadas.

Para calcular a Freq. relativa acumulada, basta ir acumulando, ao longo das linhas, o valor da Freq. relativa (simples), garantindo que, na primeira classe o valor da Freq. relativa acumulada coincida com o da Freq. relativa (simples). Além disso, não faz sentido totalizar a coluna referente à Freq. relativa acumulada.

Cálculos e respostas:

Assim, a tabela completa passa a ser dada por:

Intervalos de colesterol (mg/dL)	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. relativa acumulada
50 |— 100	4	0,05	0,05
100 |— 150	20	0,25	0,30
150 |— 200	40	0,50	0,80
200 |— 250	12	0,15	0,95
250 |— 300	4	0,05	1,00
TOTAL	80	1,00	- - -

O quantil de ordem p é um valor que acumula até ele $p \times 100\%$ dos dados observados. O valor de um quantil de ordem *p* para dados agrupados é obtido por :

$$q(p) = L_i + \frac{p - fac_{i-1}}{f_i} \times (L_s - L_i)$$

L_i : limite inferior da classe que contém o quantil de ordem p

L_s : limite superior da classe que contém o quantil de ordem p

f_i : frequência relativa da classe que contém o quantil de ordem p

fac_{i-1} : frequência relativa acumulada da classe anterior à classe que contém o quantil de ordem p

O primeiro quartil corresponde ao quantil de ordem 0,25

$$q(0{,}25) = 100 + \frac{0{,}25 - 0{,}05}{0{,}25} \times (150 - 100) = 140$$

O terceiro quartil corresponde ao quantil de ordem 0,75

$$q(0{,}75) = 150 + \frac{0{,}75 - 0{,}30}{0{,}50} \times (200 - 150) = 195$$

a) Para o cálculo da média para dados agrupados usa-se:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} PM_i f_i}{n}$$

onde PM_i é o ponto médio da i-ésima classe da tabela e f_i é a frequência absoluta simples correspondente à mesma classe. O Ponto médio, por sua vez, corresponde à média aritmética dos limites inferior e superior da classe:

Cálculos e respostas:

$$PM = \frac{(L_i + L_s)}{2}$$

Nesse caso,

Logo,

Intervalos de colesterol (mg/dL)	Freq. absoluta	PM	PM * f
50 |— 100	4	75	300
100 |— 150	20	125	2500
150 |— 200	40	175	7000
200 |— 250	12	225	2700
250 |— 300	4	275	1100
TOTAL	80	- - -	13600

$$\bar{x} = \frac{13600}{80} = 170 \text{ mg/dL}$$

Para o cálculo de mediana de dados agrupados, basta utilizar a fórmula para obter o quantil de ordem p=0,5.

$$q(0{,}5) = 150 + \left[\frac{0{,}5 - 0{,}3}{0{,}5}\right] \times (200 - 150) = 170$$

Assim, a Mediana será igual a 170 mg/dL. Como os valores de média e mediana estão próximos entre si, não haveria motivo para suspeitar da presença de comportamento anormal nos dados coletados.

c) Nessa situação, conhece-se o valor do quantil , mas não se conhece sua ordem.

$$q(p) = 200 + \left[\frac{p - 0{,}8}{0{,}15}\right] \times (250 - 200) = 225$$

Resolvendo essa equação obtém-se p=0,875, logo o percentual da amostra acima de 225 mg/dL será igual a 12,5 %, pois esse quantil acumula até ele 87,5 % das observações.

d) Para saber se existem valores discrepantes, pode-se utilizar como critério a posição em relação à distância interquartílica (DEQ) dada por: DEQ = $Q_3 - Q_1$.
Se considerarmos 1,5 vezes a distância interquartílica (1,5 x DEQ= 1,5*(195-140)=82,5) como critério para identificação de valores típicos, como é adotado na construção de um Box-plot, o primeiro intervalo de classe e o último poderiam conter pontos atípicos. Isso justifica-se, pois a região de valores atípicos será formada por valores menores que Q1-1,5*DEQ, ou seja, menores que 57,5 e valores maiores que Q3+1,5*DEQ, ou seja, maiores que 277,5. A primeira e a última classes poderiam, então, incluir valores que seriam considerados discrepantes.

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

PROAC / COSEAC - Gabarito

Um laboratório de análises clínicas tem um cadastro com dados de seis pacientes que apresentaram diagnóstico de diabetes e cujas idades (em anos) foram transcritas a seguir:

52 44 48 43 52 60

a) Se as correspondentes medidas de taxa de glicose desses seis pacientes fossem dadas por:

80 67 74 66 78 91

seria possível dizer que existe associação do tipo linear entre essas duas variáveis?

b) Construa um diagrama de dispersão correspondente e relacione seu padrão à resposta encontrada no item (a).

Cálculos e respostas:

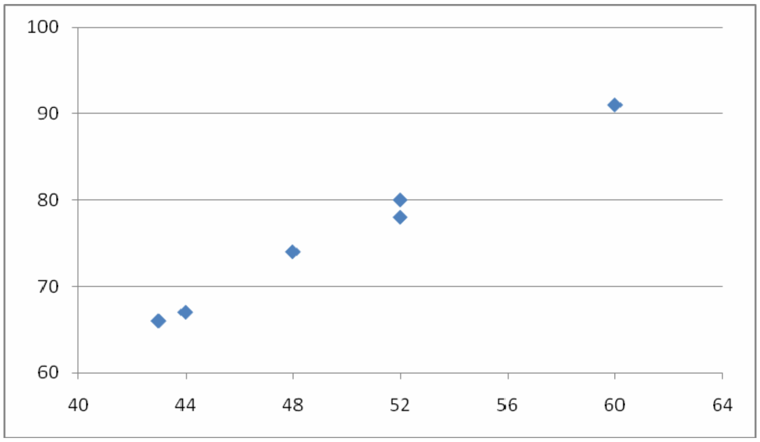
a) Para verificar a presença de associação linear entre duas variáveis quantitativas (idade e taxa de glicose) uma primeira tentativa seria utilizar o coeficiente de correlação linear de Pearson, dado por:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}}$$ para i = 1, 2,..., 6,

sendo X a série correspondente à idade e Y a série de dados correspondente à taxa de glicose. Para os valores observados de idade e taxa de glicose, o valor calculado de r será igual a +0,9968, que indica forte relação linear crescente entre as duas variáveis.

Cálculos e respostas:

b) O diagrama de dispersão para a apresentação e verificação de existência de associação entre as duas variáveis em questão é dado por:



Pelo diagrama acima, percebe-se uma a aparente relação linear crescente entre as variáveis, fato esse que é concordante com a resposta do item a).

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

PROAC / COSEAC - Gabarito

Um estudo levantou informações sobre as rendas (em reais) de vinte e cinco trabalhadores brasileiros e as rendas (em dólares) de trinta trabalhadores americanos. A tendência central e variabilidade dos resultados estão apresentados na tabela abaixo.

Medidas	**Brasileiros**	**Americanos**
Média	R$ 1.345,00	U$ 2.100,00
Mediana	R$ 841,00	U$ 1.892,00
Moda	R$ 1.200,00	U$ 2.000,00
Desvio padrão	R$ 328,00	U$ 354,00

a) Calcule o coeficiente de assimetria de Pearson para a distribuição das rendas dos brasileiros e para a distribuição das rendas dos americanos.

b) É correto afirmar que as rendas dos trabalhadores brasileiros são mais homogêneas do que as rendas dos trabalhadores americanos? Justifique sua resposta.

Cálculos e respostas:

a) Como o Coeficiente de Assimetria de Pearson é dado por $AS = \dfrac{(\bar{x} - Mo)}{s}$, então:

para os brasileiros o coeficiente de assimetria é igual a : 0,442 e

para os americanos o coeficiente de assimetria é igual a: 0,282

indicando que a distribuição de renda dos brasileiros é mais assimétrica.

b) O coeficiente de variação é uma medida adequada para comparar as variabilidades das rendas de americanos e brasileiros devido à diferença entre as suas unidades monetárias. O coeficiente de variação é obtido por $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} \times 100$. Para brasileiros, seu valor é: 24,39% e para os americanos é 16,86%. Diante desses resultados, conclui-se que as rendas dos americanos são mais homogêneas, por ter menor CV.