

PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Prove que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Cálculos e respostas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

Uma vez que os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, segue que

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)



Resolva a integral $\int x^2 e^x dx$.

Cálculos e respostas:

$$u = x^2 \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = e^x$$

A integração por partes resulta em

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

Utilizando integral por partes mais uma vez

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

$$du = dx \quad v = e^x$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

Dessa forma tem-se

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C_1 \end{aligned}$$

Onde $C_1 = -2C$

PROAC / COSEAC - Gabarito

3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Mostre que a função $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ é solução da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Cálculos e respostas:

$$u_x = e^x \operatorname{sen} y \quad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y \quad u_{yy} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$$

Portanto, u satisfaz a equação de Laplace.

PROAC / COSEAC - Gabarito

4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Utilize o produto misto para mostrar que os vetores $a = \langle 1, 4, -7 \rangle$, $b = \langle 2, -1, 4 \rangle$ e $c = \langle 0, -9, 18 \rangle$ são coplanares.

Cálculos e respostas:

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} \\ &= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o volume do paralelepípedo determinado por **a**, **b** e **c** é 0. Isso significa que os vetores **a**, **b** e **c** são coplanares.

5ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

PROAC / COSEAC - Gabarito

Considerando que a posição de uma partícula varia no tempo conforme a equação $\mathbf{r}(t) = (1,0 + 4,0 t) \mathbf{i} - (3,0 t^2 - 2,0 t^3) \mathbf{j}$, unidades no SI, encontre:

- a) a posição da partícula no instante $t=2,0$ s e o seu deslocamento;
- b) a velocidade da partícula no instante $t=2,0$ s;
- c) a aceleração da partícula no instante $t=2,0$ s e o instante em que ela vale zero.

Obs.: Variáveis em negrito indicam vetores.

Cálculos e respostas:

$$\mathbf{r}(t) = (1,0 + 4,0 t) \mathbf{i} - (3,0 t^2 - 2,0 t^3) \mathbf{j}$$

a) fazendo $t=2,0$ s: $\mathbf{r}(2) = (1,0 + 8,0) \mathbf{i} - (12 - 16) \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}(2) = 9,0 \mathbf{i} + 4,0 \mathbf{j} \text{ (m)}$

deslocamento: $\mathbf{D} = \mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(0) = [9,0 \mathbf{i} + 4,0 \mathbf{j}] - [1,0 \mathbf{i}] \Rightarrow \mathbf{D} = 8,0 \mathbf{i} + 4,0 \mathbf{j} \text{ (m)}$

b) $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t) / dt$

$$\mathbf{v}(t) = 4,0 \mathbf{i} - (6,0 t - 6,0 t^2) \mathbf{j}. \text{ Fazendo } t=2,0 \text{ s } \mathbf{v}(2) = 4,0 \mathbf{i} + 12 \mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

c) $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}(t) / dt$

$$\mathbf{a}(t) = [-6,0 + 12,0 t] \mathbf{j}. \text{ Fazendo } t=2,0 \text{ s } \mathbf{a}(2) = +18 \mathbf{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

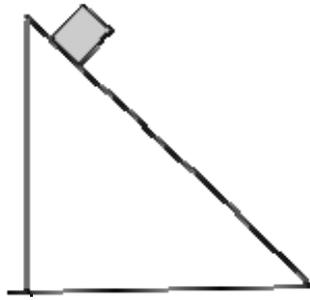
$$\mathbf{a}(t) = 0 \Rightarrow -6 + 12 t = 0 \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$$

6ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

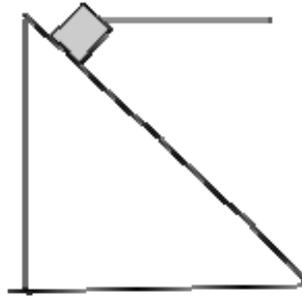
--	--

PROAC / COSEAC - Gabarito

Observe as figuras abaixo:



1-a



1-b

Na figura 1-a, considere que um bloco de massa m feito de madeira pode deslizar sobre um plano inclinado de 30° , tendo como coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0,2$ e atrito estático $\mu_e = 0,4$.

- Encontre a aceleração do bloco ao ser abandonado do alto do plano inclinado.
- Se o bloco é abandonado de uma altura de H , encontre a velocidade com que chega à base do plano em função de H .

Na figura 1-b, considere que uma barra muito fina pressiona o bloco horizontalmente. O bloco permanece parado em relação ao plano. Note que a barra toca no bloco no centro do lado superior.

- Encontre a tração na barra.

Cálculos e respostas:

a) $F_r = ma$; Ao longo do plano ; $P \sin\theta - f_{at} = m a$ (1), sendo θ o ângulo de inclinação.

$f_{at} = \mu_c N$, sendo $N = P \cos\theta$ e $P = mg$ substituindo em (1)

$mg \sin\theta - \mu_c mg \cos\theta = ma \Rightarrow a = g (\sin\theta - \mu_c \cos\theta)$, substituindo os dados
 $a \sim 3,3 \text{ m/s}^2$

b) Usando conservação de energia, considerando que a energia dissipada é igual ao trabalho da força de atrito

$U = K + W_{fat} \Rightarrow mgH = \frac{1}{2} mv^2 + f_{at} d$, onde d é a distância ao longo do plano.

Cálculos e respostas:

Usando identidades trigonométricas encontramos $d = 2H$

PROAC / COSEAC - Gabarito

$$mgH = \frac{1}{2} mv^2 + \mu cmg \cos \theta d \Rightarrow v^2 = 2g (H - \mu c \cos \theta d) \Rightarrow$$
$$v = \sqrt{0,83 * 2gH}$$

um valor menor do que o caso sem atrito, como o esperado.

OBS.: o problema pode ser resolvido, usando-se a aceleração $a = g (\sin \theta - \mu c \cos \theta)$ e a equação $v^2 = v_0^2 + 2 a d$.

c) A força exercida pela barra sobre o bloco é igual a tração T da barra.

Considerando o equilíbrio: $\mathbf{Fr} = 0$:

$$fat_E = \mu_E N \quad (1)$$

$$\text{Ao longo do plano} \quad fat_E + T \sin 30 = P \sin 30 \quad (2)$$

$$\text{Perpendicular ao plano} \quad N = P \cos 30 + T \cos 30 \quad (3)$$

$$\text{Substituindo (3) em (1):} \quad fat_E = \mu_E (P \cos 30 + T \cos 30) \quad (4)$$

$$\text{Substituindo (4) em (2):} \quad \mu_E (P \cos 30 + T \cos 30) + T \sin 30 = P \sin 30$$

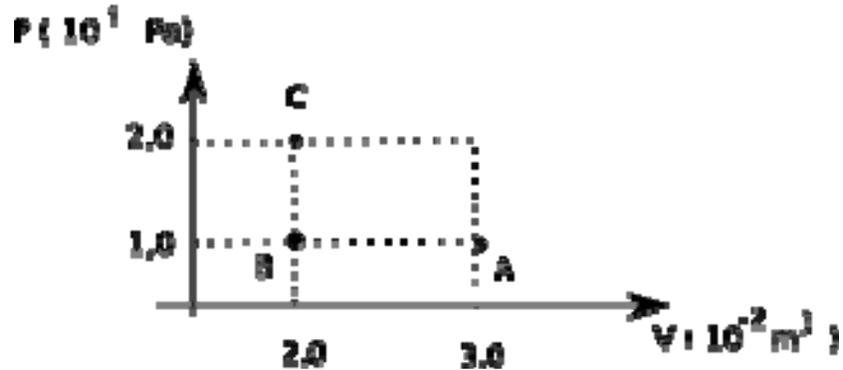
$$\text{resolvendo para T:} \quad T = \frac{(\sin 30 - \mu_E \cos 30)}{(\sin 30 + \mu_E \cos 30)} P \Rightarrow$$

$$T = 0,19 P$$

7ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Observe o Diagrama PV de um gás monoatômico ideal com quantidade $n = 1 \text{ mol}$.

PROAC / COSEAC - Gabarito



- a) Encontre a temperatura em kelvin dos pontos A, B e C.
 b) Um ciclo pode ser feito com esse gás partindo do ponto A, passando por B, depois C e retornando para o ponto A. Esboce no diagrama o trecho A-B, sendo uma compressão isobárica; o trecho B-C, sendo uma pressurização a volume constante; e o trecho C-A, sendo uma expansão adiabática. Calcule Q e W em cada trecho.

DADOS:

$$R = 8,314 \text{ J/mol.K} \quad g = 10 \text{ m/s}^2 \quad \text{sen}30^\circ = 0,50 \quad \text{cos}30^\circ = \sqrt{3}/2 \sim 0,86$$

$$\text{Gás Monoatômico } c_v = 3R/2, c_p = 5R/2 \quad \gamma = c_p / c_v$$

$$dW = pdv, \quad dQ = ncdT, \quad pv = nRT,$$

Cálculos e respostas:

a)

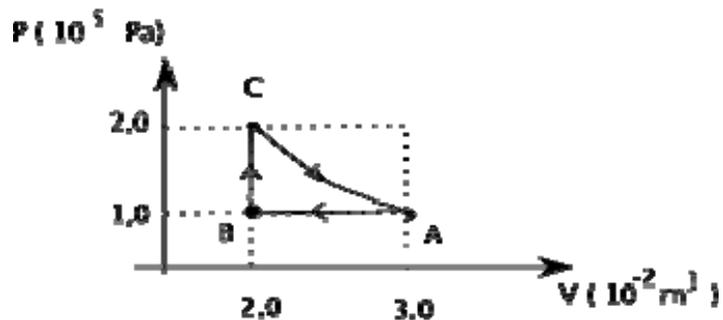
$$n=1$$

$$Pv = nRT \quad P_A V_A = n R T_A \quad T_A = \frac{(P_A V_A)}{R} \quad T_A \sim 360,6 \text{ K}$$

$$\text{Da mesma forma para os outros pontos} \quad T_B \sim 240,6 \text{ K} \quad T_C \sim 481,1 \text{ K}$$

Cálculos e respostas:

b)



PROAC / COSEAC - Gabarito

$$Q = n c \Delta T$$

$$\text{A-B: } Q_{AB} = n c_v (T_B - T_A) \sim -2,5 \text{ kJ}$$

$$W_{AB} = P (V_B - V_A) \sim +2,0 \text{ kJ}$$

$$\text{B-C: } Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B) \sim +3,0 \text{ kJ}$$

$$W_{CA} = 0 \quad (dv=0)$$

$$\text{C-A } Q_{AB} = 0 \quad (\text{adiabático})$$

$$W_{AB} = (P_B V_B - P_A V_A) / (\gamma - 1) \sim -1,5 \text{ kJ}$$