UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TRANSFERÊNCIA – 2º semestre letivo de 2009 e 1º semestre letivo de 2010

CURSO de MATEMÁTICA (Niterói) - Gabarito

INSTRUÇÕES AO CANDIDATO

- Verifique se este caderno contém:
  PROVA DE **REDAÇÃO** – com uma proposta;
  PROVA DE **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS –** com questões discursivas, totalizando dez pontos.
- Se este caderno não contiver integralmente o descrito no item anterior, notifique imediatamente ao fiscal.
- No espaço reservado à identificação do candidato, além de assinar, preencha o campo respectivo com seu nome.
- Não é permitido fazer uso de instrumentos auxiliares para o cálculo e o desenho, portar material que sirva para consulta nem equipamento destinado à comunicação.
- Na avaliação do desenvolvimento das questões será considerado somente o que estiver escrito a caneta, com tinta azul ou preta, nos espaços apropriados.
- O tempo disponível para realizar as provas é de quatro horas.
- Ao terminar, entregue ao fiscal este caderno devidamente assinado. Tanto a falta de assinatura quanto a assinatura fora do local apropriado poderá invalidar sua prova.
- Certifique-se de ter assinado a lista de presença.
- Colabore com o fiscal, caso este o convide a comprovar sua identidade por impressão digital.
- Você deverá permanecer no local de realização das provas por, no mínimo, noventa minutos.

AGUARDE O AVISO PARA O INÍCIO DA PROVA

RESERVADO À IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

NOME

ASSINATURA : ______________________________

RESERVADO AOS AVALIADORES

REDAÇÃO			rubrica: ____________
C. ESPECÍFICOS			rubrica: ____________

PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere os pontos A(2,0), B(3,1) e C(0,2).

a) Determine o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

b) Seja **r** a reta que contém os pontos B e C . Considere M um ponto da reta **r** tal que os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{BC}$ sejam perpendiculares. Encontre as coordenadas do ponto M.

c) Considere o triângulo de vértices A, B e C e determine sua altura relativa ao lado BC.

Cálculos e respostas:

a) Seja α o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Temos,

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(1,1)\,.\,(-2,2)}{4} = 0$$

Logo, $\alpha = 90^o$.

b) A equação da reta **r** é dada por:

$$y - 2 = \frac{1}{-3}(x - 0) \Rightarrow y + \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow 3y + x = 6.$$

Consideremos o ponto $M(x, y)$. Para que os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{BC}$ sejam perpendiculares, devemos ter

$$(x - 2, y).(-3,1) = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 6 = 0 \Leftrightarrow y - 3x = -6.$$

Cálculos e respostas:

Portanto, temos que resolver o sistema $\begin{cases} 3y + x = 6 \\ y - 3x = -6 \end{cases}$.

Multiplicando a primeira equação do sistema por 3 e somando a segunda equação, temos:

$10y = 12 \Leftrightarrow y = \frac{6}{5}$. E, $x = 6 - \frac{18}{5} = \frac{12}{5}$.

Logo, as coordenadas do ponto M são $x = \frac{12}{5}$ e $y = \frac{6}{5}$.

c) A altura relativa ao lado BC é dada pelo módulo do vetor $\overrightarrow{AM}$.

Temos, $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$. Obtemos, então, $||\overrightarrow{AM}|| = \sqrt{\frac{40}{25}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$.

PROAC / COSEAC - Gabarito

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere a matriz A , 3 x 3 , dada por

$$A = \begin{pmatrix} m & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

sendo m um número real.

Seja X a matriz-coluna 3 x 1 dada por $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

a) Determine os valores de m de modo que o sistema $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenha solução diferente da solução trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

b) Suponha que $m = 1$ e encontre uma solução para o sistema $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, diferente da solução trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

c) Supondo que $m = 1$, encontre uma base para o espaço de soluções do sistema $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e determine a dimensão desse espaço.

Cálculos e respostas:

(a) Para que o sistema $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenha solução diferente da trivial, a matriz A não pode admitir inversa; isto é, o determinante de A deve ser nulo.

Assim,

$-m^2 - 1 + 10 - 5 - m - 2m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$.

Logo, $m = 1 \;\; ou \;\; m = -4$.

Cálculos e respostas:

(b) Supondo $m = 1$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Fazendo (1)+(2), temos $x_2 = 2x_1$ e de (2)-(3), temos $x_3 = -3x_1$.
O sistema é indeterminado, pois $m = 1$ foi um dos valores encontrados no item (a).
Uma solução para o sistema pode ser, por exemplo, $x_1 = 1; x_2 = 2 \ e \ x_3 = -3.$

(c) Supondo $m = 1$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Fazendo (1)+(2), temos $x_2 = 2x_1$ e de (2)-(3), temos $x_3 = -3x_1$.
Assim, as soluções do sistema são da forma $(x_1, 2x_1, -3x_1)$=$x_1(1,2,-3)$.
Portanto, uma base para o espaço de soluções é (1,2,-3) e sua dimensão é 1.

PROAC / COSEAC - Gabarito

$3^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere as funções f e g definidas por

$$f(x) = x^2 + 6x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x+9} - 3.$$

a) Determine o domínio da função g.

b) Seja $H(x) = (gof)(x)$. Determine a expressão de $H(x)$ e esboce o gráfico da função H.

c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função g que é paralela à reta $2y - x + 8 = 0$.

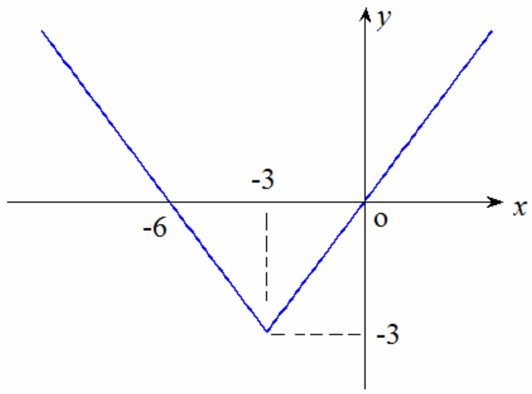
Cálculos e respostas:

(a) $Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -9\}$.

(b) Temos,

$$H(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 9} - 3 = \sqrt{(x+3)^2} - 3 = |x+3| - 3.$$

O esboço do gráfico da função H é dado na figura a seguir:



(c) O coeficiente angular da reta $2y - x + 8 = 0$ é $1/2$. Portanto, precisamos encontrar o ponto do gráfico da função g cuja reta tangente possui coeficiente angular $1/2$.

Logo, queremos encontrar x_0 tal que $g'(x_0) = 1/2$.

Cálculos e respostas:

Mas, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+9}} \Rightarrow g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0+9}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = -8.$

Assim, o ponto do gráfico de g procurado é $(-8,-2)$.

A equação da reta tangente é, então, dada por:

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x + 8) \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + 2.$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Seja f uma função cuja derivada satisfaz a equação $f'(x) = xe^{-x^2+2}$.

a) Determine a expressão de $f(x)$ sabendo que $f(1) = e$.

b) Escreva a expressão de $f''(x)$.

Cálculos e respostas:

(a) Devemos calcular

$$\int xe^{-x^2+2}dx = -\frac{e^{-x^2+2}}{2}+C.$$

Porém, $f(1) = -\frac{e}{2} + C = e \Leftrightarrow C = \frac{3e}{2}$.

Logo, $f(x) = -\frac{e^{-x^2+2}}{2} + \frac{3e}{2}$.

(b) A expressão de $f''(x)$ é dada por

$$f''(x) = e^{-x^2+2} - 2x^2e^{-x^2+2}.$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere as seguintes curvas

$$C_1: x^2 + 2x + y^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad C_2: x^2 + y^2 - 2y = 0$$

a) Faça um esboço das curvas C_1 e C_2 em um mesmo sistema de eixos coordenados xy.

b) Determine as coordenadas dos pontos de interseção das duas curvas.

Cálculos e respostas:

(a) Temos $C_1: x^2 + 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$

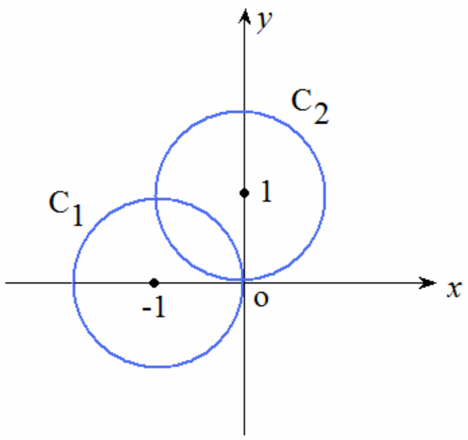
e

$$C_2: x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Logo, as curvas C_1 *e* C_2 são circunferências.

A curva C_1 é uma circunferência de centro em $(-1,0)$ e raio 1 e a curva C_2 é uma circunferência de centro em $(0,1)$ e raio 1.

O esboço das curvas está na figura a seguir.



Cálculos e respostas:

(b) Os pontos de interseção das curvas são obtidos resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Substituindo a eq. (2) em (1) temos,

$$2y + 2x = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Substituindo a igualdade acima na eq. (1), temos

$$2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = -1.$$

Portanto, os pontos de interseção são $(0,0)$ e $(-1,1)$.

PROAC / COSEAC - Gabarito