UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TRANSFERÊNCIA – 2º semestre letivo de 2008 e 1º semestre letivo de 2009

CURSO de MATEMÁTICA (Niterói) - Gabarito

INSTRUÇÕES AO CANDIDATO

- Verifique se este caderno contém:

  PROVA DE **REDAÇÃO** – enunciada uma proposta;

  PROVA DE **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS –** enunciadas questões discursivas, totalizando dez pontos.
- Se este caderno não contiver integralmente o descrito no item anterior, <u>notifique imediatamente ao fiscal</u>.
- No espaço reservado à identificação do candidato, além de assinar, preencha o campo respectivo com seu nome.
- Não é permitido fazer uso de instrumentos auxiliares para o cálculo e o desenho, portar material que sirva para consulta nem equipamento destinado à comunicação.
- Na avaliação do desenvolvimento das questões será considerado somente o que estiver escrito a caneta, com tinta azul ou preta, nos espaços apropriados.
- O tempo disponível para realizar estas provas é de quatro horas.
- Ao terminar, entregue ao fiscal este caderno devidamente assinado. Tanto a falta de assinatura quanto a assinatura fora do local apropriado poderá invalidar sua prova.
- Certifique-se de ter assinado a lista de presença.
- Colabore com o fiscal, caso este o convide a comprovar sua identidade por impressão digital.
- Você deverá permanecer no local de realização das provas por, no mínimo, noventa minutos.

AGUARDE O AVISO PARA O INÍCIO DA PROVA

RESERVADO À IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

NOME

ASSINATURA : ______________________

RESERVADO AOS AVALIADORES

REDAÇÃO			rubrica: ___________
C. ESPECÍFICOS			rubrica: ___________

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (3,0 pontos)

a) Determine, caso exista, o ponto do intervalo (–1,1) onde a função $f(x) = x^4 - 2x^2$ assume o seu valor máximo.

b) Calcule g'(1) sendo $g(x) = \int_0^x e^{\cos(arctg\, t)}\, dt$.

Cálculos e respostas:

a) O(s) ponto(s) onde f assume o seu valor máximo no intervalo aberto $(-1,1)$ são pontos críticos de f.

Derivando f obtemos $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$. Logo x é ponto crítico de f se, e só se, $f'(x) = 0$ ou seja, $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$. Como $1, -1 \notin (-1,1)$ o único candidato a ponto de máximo é o ponto crítico $x = 0$.

Calculando a derivada segunda de f, temos: $f''(x) = 12x^2 - 4$ e, como $f''(0) = -12 < 0$ concluímos que o ponto crítico $x = 0$ é um ponto de máximo local de f.

Portanto, $x = 0$ é o ponto do intervalo $(-1,1)$ onde a função f assume o seu valor máximo.

b) A função $h(t) = e^{\cos(\mathrm{arctg}\, t)}$ está definida e é contínua em todo $\mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo: $g'(x) = h(x)$. Assim, $g'(1) = h(1) = e^{\cos(\mathrm{arctg}\, 1)} = e^{\sqrt{2}/2}$.

$2^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (2,0 pontos)

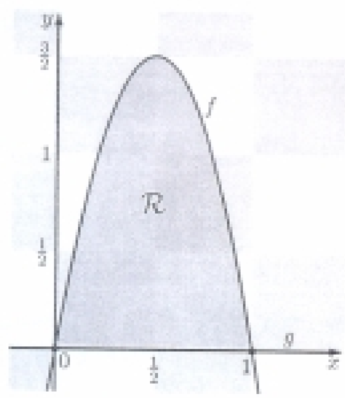
Faça um esboço e calcule a área da região $\Re$ do plano limitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = 6x(1-x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{e^{(x-\operatorname{sen} x)^2} - e^{(\operatorname{sen} x - x)^2}}{2}$$

Cálculos e respostas:

Como $(x - \operatorname{sen} x)^2 = (\operatorname{sen} x - x)^2$, temos que $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, o gráfico de $g(x)$ é a reta horizontal que passa pela origem no plano cartesiano, ou seja, é o eixo x.

Portanto, a região $\mathcal{R}$ é a região acima do eixo x limitada pelo gráfico de $f(x)$ que é a parábola que corta o eixo x em 0 e 1 como mostramos na figura ao lado.



A área de $\mathcal{R}$ se calcula da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathcal{R}) &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 6x(1-x)\,dx \\ &= \int_0^1 6x\,dx - \int_0^1 6x^2\,dx = 3x^2\Big|_0^1 - 2x^3\Big|_0^1 = 3 - 2 = 1\,. \end{aligned}$$

3ª QUESTÃO: (3,0 pontos)

Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(1,0,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad T(0,1,0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad T(0,0,1) = (0,0,1)$$

Além disso, se Q é o cubo de vértices opostos (0,0,0) e (1,1,1), determine o volume de T(Q).

Cálculos e respostas:

Se (x, y, z) é um vetor arbitrário do $\mathbb{R}^3$, temos:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + z(0,0,1) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), z\right) \end{aligned}$$

A matriz que representa T em relação à base canônica $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é a matriz ortogonal

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é $\det[T] = 1$. Logo,

$$\text{volume}\,(T(Q)) = \det[T] \times \text{ volume}\,(Q) = 1 \times 1 = 1.$$

$4^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (2,0 pontos)

Seja *W* o subespaço gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,-1)$. Determine uma base, a dimensão e equações paramétricas para *W*.

Cálculos e respostas:

Observando que $v_2 = v_1 - v_3$ temos que o subespaço gerado por v_1, v_2 e v_3 é de fato gerado por v_1 e v_3.

Por outro lado v_1 e v_3 são linearmente independentes, pois

$$a(1,1,0) + b(0,0,-1) = (0,0,0) \Longrightarrow (a,a,-b) = (0,0,0) \Longrightarrow a = 0 \text{ e } b = 0.$$

Portanto, o subespaço W tem dimensão 2 e $\{v_1, v_3\}$ é uma base.

Finalmente, $v \in W$ se, e somente se, $v = sv_1 + tv_3$, para alguns $s,t \in \mathbb{R}$. Ou seja, se $v = (x,y,z)$, então $v = s(1,1,0) + t(0,0,-1)$, $s,t \in \mathbb{R}$. Isto é, W é dado pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = -t \end{cases}$, $s,t \in \mathbb{R}$.

Espaço reservado para rascunho

Espaço reservado para rascunho

Espaço reservado para rascunho