UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TRANSFERÊNCIA – 2º semestre letivo de 2008 e 1º semestre letivo de 2009

CURSO de ENGENHARIA (MECÂNICA) – VOLTA REDONDA - Gabarito

INSTRUÇÕES AO CANDIDATO

- Verifique se este caderno contém:

  PROVA DE **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS –** enunciadas questões discursivas, totalizando dez pontos.
- Se este caderno não contiver integralmente o descrito no item anterior, notifique imediatamente ao fiscal.
- No espaço reservado à identificação do candidato, além de assinar, preencha o campo respectivo com seu nome.
- Não é permitido fazer uso de instrumentos auxiliares para o cálculo e o desenho, portar material que sirva para consulta nem equipamento destinado à comunicação.
- Na avaliação do desenvolvimento das questões será considerado somente o que estiver escrito a caneta, com tinta azul ou preta, nos espaços apropriados.
- O tempo disponível para realizar estas provas é de quatro horas.
- Ao terminar, entregue ao fiscal este caderno devidamente assinado. Tanto a falta de assinatura quanto a assinatura fora do local apropriado poderá invalidar sua prova.
- Certifique-se de ter assinado a lista de presença.
- Colabore com o fiscal, caso este o convide a comprovar sua identidade por impressão digital.
- Você deverá permanecer no local de realização das provas por, no mínimo, noventa minutos.

AGUARDE O AVISO PARA O INÍCIO DA PROVA

RESERVADO À IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

NOME

ASSINATURA : ____________________

RESERVADO AOS AVALIADORES

REDAÇÃO			rubrica: ___________
C. ESPECÍFICOS			rubrica: ___________

Prova de Conhecimentos Específicos

Observação: Todas as respostas devem estar justificadas, isto é, acompanhadas dos cálculos e argumentações feitas.

1ª QUESTÃO: (1,4 ponto)

Determine as derivadas parciais da função $f(x,y) = \dfrac{x\,sen(y)}{\cos(2x^2 - 3y^4)}$.

Cálculos e respostas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(xSen(y))_x Cos(2x^2-3y^4) - xSen(y)[Cos(2x^2-3y^4)]_x}{Cos^2(2x^2-3x^4)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{Sen(y)Cos(2x^2-3y^4) - xSen(y)[-Sen(2x^2-3y^4)4x]}{Cos^2(2x^2-3x^4)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{Sen(y)Cos(2x^2-3y^4) + 4x^2Sen(y)Sen(2x^2-3y^4)}{Cos^2(2x^2-3x^4)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(xSen(y))_y Cos(2x^2-3y^4) - xSen(y)[Cos(2x^2-3y^4)]_y}{Cos^2(2x^2-3x^4)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xCos(y)Cos(2x^2-3y^4) - xSen(y)[-Sen(2x^2-3y^4)(-12y^3)]}{Cos^2(2x^2-3x^4)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xCos(y)Cos(2x^2-3y^4) - 12xy^3Sen(y)Sen(2x^2-3y^4)]}{Cos^2(2x^2-3x^4)}$$

2ª QUESTÃO: (1,6 ponto)

Calcule $\iint_B (x+y)\ dx\ \ dy$, onde B é a região compreendida entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = e^x$ com $0 \leq x \leq 1$.

Cálculos e respostas:

$$\int_0^1 \left[\int_x^{e^x} (x+y)dx \right] dy = \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2} \Big]_x^{e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(xe^x + \frac{e^{2x}}{2} \right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[xe^x + \frac{e^{2x}}{2} - \frac{3x^2}{2} \right] dx$$

$$= xe^x - e^x + \frac{e^{2x}}{4} - \frac{x^3}{2} \Big]_0^1$$

$$= \left(1 - 1 + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(0 - 1 + \frac{1}{4} - 0 \right)$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Seja o operador linear $T(x,y,z) = (x+2y+2z\ ,\ x+2y-z\ ,\ -x+y+4z)$.

a) Calcule $[T]$, onde $[T]$ é a matriz de $[T]$ na base canônica de R^3.

b) Calcule os autovalores e os autovetores de T.

c) T é diagonalizável ? Em caso afirmativo, encontre uma base $B = \{\vec{u}_1\ ,\vec{u}_2\ ,\ \vec{u}_3\}$ de R^3 e $[T]_B$, onde $[T]_B$ é a matriz de T na base B tal que esta matriz seja uma matriz diagonal.

d) Seja a base $A = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de R^3. Calcule $[T]_A$, onde $[T]_A$ é a matriz de T na base A.

Cálculos e respostas:

a) Notemos que,

$$T(1,0,0) = (1,1,-1)$$
$$T(0,1,0) = (2,2,1)$$
$$T(0,0,1) = (2,-1,4)$$

$$\textit{então} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Autovalores: seja a matriz identidade $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P(x) = \det[A - \lambda I]$$
$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9$$
$$P(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)^2$$

como $P(\lambda) = 0$ então $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$ são os autovalores do operador linear T

Autovetores:

- $\lambda = 1$:

$$[A - \lambda I]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A - I]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{...(I)}$$

Cálculos e respostas:

Escalonando $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *temos* que (I) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y - z = 0$$

$$y + z = 0$$

Possui infinitas soluções. Se *y=t* então *z=-t* e *x=-2t* logo,
(x,y,z)=(-2t,t, -t) = t(-2,1,-1)
$W_1 = \{t(-2,1,-1) / t \in \Re\}$ é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda = 1$

- $\lambda = 3$

$$[A - \lambda I]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A - 3I]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{...(II)}$$

Escalonando $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *temos* que (II) é equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - y - z = 0$$

Possui infinitas soluções. Se *y=t e z=s* então *x=t+s* logo,
(x,y,z)=(t+s,t, s) = t(1,1,0)+s(1,0,1)
$W_3 = \{t(1,1,0) + s(1,0,1) / t, s \in \Re\}$ é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda = 3$

c) Notemos que, pelo item b), o conjunto *B={(2,1,-1),(1,1,0),(1,0,1)}* é uma base de $\Re^3$ formado por autovetores de T. Portanto T e diagonalizavél. Nesta base B temos que :

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

d) Seja o conjunto *A={(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)}* uma base de $\Re^3$

- *T(1,1,1) = (5,2,4)=a(1,1,1)+b(1,1,0)+c(1,0,0)*

(5,2,4)=(a+b+c, a+b, a)
Então: *a=4, b=-2 e c=3*

Cálculos e respostas:

- $T(1,1,0) = (3,3,0)=l(1,1,1)+m(1,1,0)+n(1,0,0)$

  $(3,3,0)=(l+m+n,\ l+m,\ l)$

  Então: $l=0$, $m=3$ e $n=0$

- $T(1,0,0) = (1,1,-1)=p(1,1,1)+q(1,1,0)+r(1,0,0)$

  $(1,1,-1)=(p+q+r,\ p+q,\ p)$

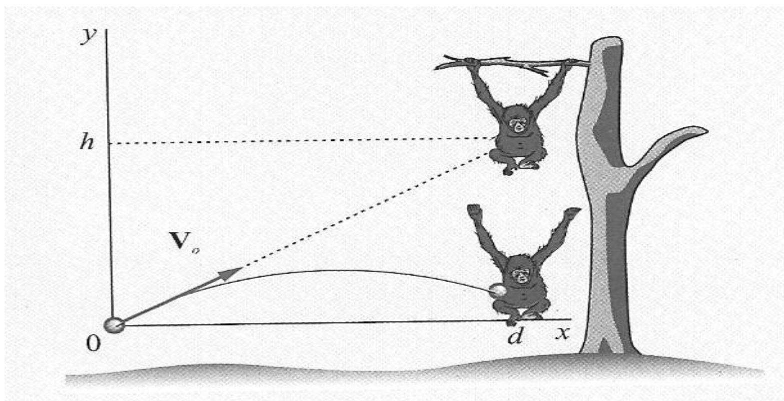
  Então: $p=-1$, $q=2$ e $r=0$

  Logo a matriz a matriz de T na base A é dado por:

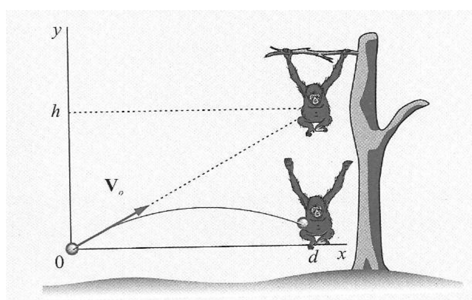
$$[T]_A = \begin{bmatrix} a & l & p \\ b & m & q \\ c & n & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Na tradicional história do caçador e do macaco, este se encontra pendurado em um galho. O caçador aponta para o macaco e atira. O macaco se assusta com o estrondo e solta-se do galho no mesmo instante em que o projétil da arma é atirado. Mostre analiticamente que o projétil atinge o alvo.



Cálculos e respostas:



O macaco abandona-se de modo que sua velocidade inicial é $v_{0y}= 0$, e ele se move só na direção vertical.

O projétil tem componentes de velocidade nas duas direções.

$$v_{0y}= v_0 \ \text{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad v_{0x}= v_0 \ \cos(\theta). \qquad (1)$$

Da figura acima, sendo D a distância em linha reta do projétil à posição inicial do macaco, temos que

$$\text{sen}(\theta) = h / D \qquad \text{e} \qquad \cos(\theta) = d / D , \qquad (2)$$

que juntamente com as equações (1) nos levam a:

$$(v_{0y} / v_{0x}) = (h / d), \text{ logo} \qquad v_{0y}= v_{0x} (h / d) . \qquad (3)$$

Tomando o sentido para cima para velocidades positivas, temos, para o macaco:

$y_m = h - ½ g t^2$

Cálculos e respostas:

para o projétil temos movimentos nas duas direções:

$x_p = v_{0x}\ t$ e $y_p = v_{0y}\, t - ½\, g\, t^2$ (4)

usando o resultado da equação (3)

$y_p = v_{0x}\ (h/d)t - ½\, g\, t^2$

O instante em que o projétil atinge a coordenada horizontal d é dado por $t_d = d / v_{0x}$, logo

$y_p = v_{0x}\ (h / d)\ (d / v_{0x}) - ½\, g(d/ v_{0x})^2$, logo, $y_p = h - ½\, g(d / v_{0x})^2$. (5)

No instante t_d a cordenada vertical do macaco é:

$y_m = h - ½\, g(d / v_{0x})^2$ (6)

idêntico à coordenada vertical do projétil, equação (5), provando que o projétil atinge o macaco.

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Compara-se o estudo realizado em dois planos inclinados. Em um deles (Figura 1-A) é abandonado um bloco de massa M, cujo atrito entre ele e o plano é desprezível. No segundo plano (Figura 1-B), um disco homogêneo de raio R, com mesma massa M do bloco, é abandonado da mesma altura H da qual foi abandonado o bloco na situação A. Neste caso, o disco desce em rolamento puro. Os planos têm a mesma inclinação.

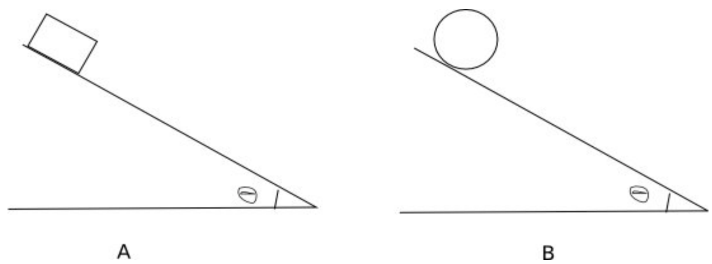


Figura 1: A) Plano sem atrito com bloco de massa M abandonado à altura H, B) Plano com atrito com disco de raio R e massa M abandonado à altura H.

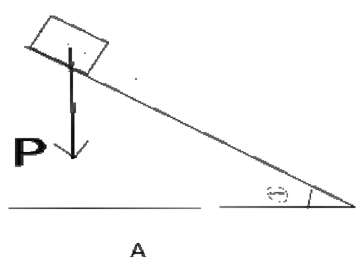
a) Calcule a aceleração do bloco ao descer o plano 1 (Figura 1-A) e sua velocidade na parte mais baixa do plano.

b) Calcule a aceleração do disco ao descer o plano 2 (Figura 1-B) e sua velocidade na parte mais baixa.

c) Considerando o rolamento puro do disco ao longo do plano 2, discuta a direção da força de atrito estático quando o disco está descendo e quando o disco está subindo o plano. Ela tem o mesmo sentido nos dois casos? Justifique sua resposta.

Cálculos e respostas:

a) As forças que atuam em M são :



a)

Pela segunda lei de Newton:

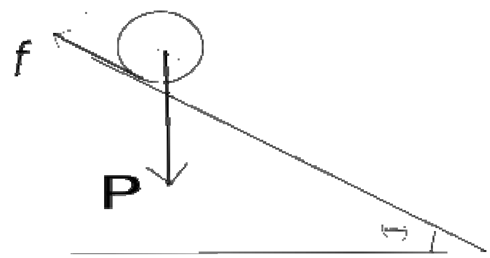
$P \text{ sen}(\theta) = M a$, logo $a = g \text{ sen}(\theta)$

Cálculos e respostas:

Usando a conservação de energia:

$\frac{1}{2} M v^2 = M g H$, logo $v = (2gH)^{1/2}$

b) No disco, atuam o peso P e o atrito estático *f*, já que o rolamento é puro



A segunda lei de Newton fica:
$P \operatorname{sen}(\theta) - f = M a$ (7)

A dinâmica de rotações diz que
$\tau = I \alpha$, sendo $\alpha = a / R$, no rolamento puro. O torque devido ao atrito é

$\tau = f R$, o que nos leva a $f = I a / R^2$ (8)

Substituindo em (7) temos:

$P \operatorname{sen}(\theta) = (M + I a / R^2)$.
Se usamos o momento de inércia do disco em relação ao CM ($\frac{1}{2} MR^2$) temos

$a = (2/3) g \operatorname{sen}(\theta)$

Para calcular a velocidade, usamos novamente a conservação de energia, mas levando em conta o rolamento:

$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = M g H$,
onde $\omega = v / R$, devido ao rolamento puro. Se usamos o momento de inércia do disco obtemos

$v = [(4/3) gH]^{1/2}$

c) Descendo o atrito é contra o movimento: para cima ao longo do plano.
Subindo o atrito é a favor o movimento: para cima ao longo do plano

subindo, o atrito é responsável pelo fim do rolamento.

6ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Um gás ideal realiza o ciclo apresentado na Figura 2. Partindo do ponto A, ele é comprimido isobaricamente até B; a partir daí, é aquecido isovolumetricamente até o ponto C; desse ponto, o gás se expande isobaricamente até o ponto D e então é resfriado isovolumetricamente até o ponto inicial A .

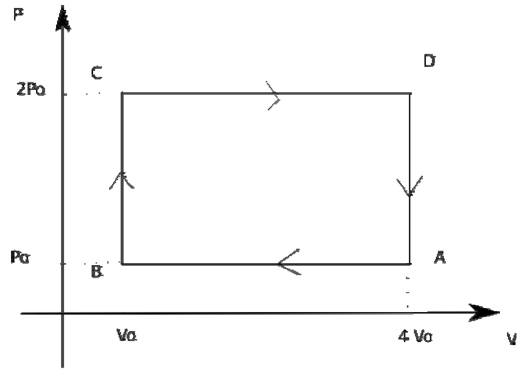


Figura 2 : ciclo de transformações sofridas por um gás ideal

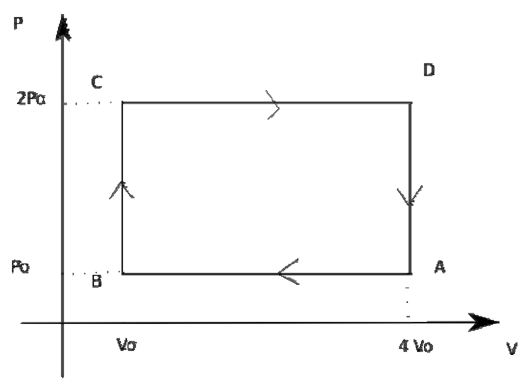
Sabendo que no ponto A o gás está a uma temperatura T, calcule

a) as temperaturas nos pontos B, C e D em função da temperatura no ponto A;
b) o rendimento do ciclo.

Dados: $dQ = n\,c\,dT$, c : calor específico

$\gamma = (c_P/c_V)$ c_P (c_V) : calor específico à pressão (volume) constante

Cálculos e respostas:



a)
No ponto A, sendo um gás ideal, temos:

$P_AV_A = n\,RT_A$ o que nos leva a $T = 4\,P_0V_0 / nR$

No ponto B: $P_BV_B = n\,RT_B$ o que nos leva a $T_B = P_0V_0 / nR = T / 4$

Cálculos e respostas:

No ponto C: $P_CV_C = n\,RT_C$ o que nos leva a $T_C = 2\,P_0V_0 / nR = T/2$

No ponto D: $P_DV_D = n\,RT_D$ o que nos leva a $T_D = 8\,P_0V_0 / nR = 4\,T$

b)

$e = W / Q_{en}$

portanto

$$e = \frac{|Q_{en}| - |Q_{sai}|}{Q_{em}} = 1 - \frac{|Q_{sai}|}{|Q_{en}|} \qquad (9)$$

$Q_{en} = Q_{BC} + Q_{CD}$

$Q_{BC} = nc_V\,\Delta T = nc_V\,(T_C - T_B)$
$= nc_V T/4$

$Q_{CD} = nc_P\,\Delta T = nc_P(T_D - T_C)$
$= nc_P\;5T/2$

$Q_{sai} = Q_{AB} + Q_{DA}$

$Q_{AB} = nc_P\,\Delta T = nc_P(T_B - T_A)$
$= -\; nc_P\;3T/4$

$Q_{DA} = nc_V\,\Delta T = nc_V\,(T_A - T_D)$
$= -\,nc_V 3T/4$

$Q_{en} = nc_V T/4 + nc_P\;5T/2$ $\qquad |Q_{sai}| = nc_P\;3T/4 + nc_V 3T/4$

usando o fato de que $(c_P/c_V) = \gamma$ podemos escrever:

$Q_{en} = n\,c_V T\,(1 + 10\gamma)/4$ $\qquad |Q_{sai}| = n\,c_V T\,(12 + 3\gamma)/4$ (10)

Substituindo (10) em (9) temos:

$e = 1 - (12 + 3\gamma)/(1 + 10\gamma)$