UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
PRÓ-REITORIA DE ASSUNTOS ACADÊMICOS
COSEAC-COORDENADORIA DE SELEÇÃO

TRANSFERÊNCIA – 2º semestre letivo de 2007 e 1º semestre letivo de 2008

CURSO de ENGENHARIA (MECÂNICA e PRODUÇÃO) – VOLTA REDONDA - Gabarito

INSTRUÇÕES AO CANDIDATO

- Verifique se este caderno contém:
  PROVA DE **REDAÇÃO** – enunciadas duas propostas;
  PROVA DE **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS –** enunciadas questões discursivas, totalizando dez pontos.
- Se este caderno não contiver integralmente o descrito no item anterior, notifique imediatamente ao fiscal.
- No espaço reservado à identificação do candidato, além de assinar, preencha o campo respectivo com seu nome.
- Não é permitido fazer uso de instrumentos auxiliares para o cálculo e o desenho, portar material que sirva para consulta nem equipamento destinado à comunicação.
- Na avaliação do desenvolvimento das questões será considerado somente o que estiver escrito a caneta, com tinta azul ou preta, nos espaços apropriados.
- O tempo disponível para realizar estas provas é de quatro horas.
- Ao terminar, entregue ao fiscal este caderno devidamente assinado. Tanto a falta de assinatura quanto a assinatura fora do local apropriado poderá invalidar sua prova.
- Certifique-se de ter assinado a lista de presença.
- Colabore com o fiscal, caso este o convide a comprovar sua identidade por impressão digital.
- Você deverá permanecer no local de realização das provas por, no mínimo, noventa minutos.

AGUARDE O AVISO PARA O INÍCIO DA PROVA

RESERVADO À IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

NOME

ASSINATURA : ____________________

RESERVADO AOS AVALIADORES

REDAÇÃO			rubrica: ____________
C. ESPECÍFICOS			rubrica: ____________

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (1,25 ponto)

O sistema abaixo não tem solução para quais valores de *a*? Exatamente uma solução? Infinitas soluções?

$$x + 2y - 3z = 4$$
$$3x - y + 5z = 2$$
$$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$$

Cálculos e respostas:

Temos a seguinte matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & (a^2-14) & a+2 \end{array}\right)$$

Aplicamos agora o Método de Eliminação de Gauss:
Multiplicamos a primeira linha por –3 e somamos à segunda linha; multiplicamos a primeira linha por –4 e somamos à terceira linha. Obtemos, assim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & 10 \\ 0 & -7 & (a^2-2) & a-14 \end{array}\right)$$

Agora multiplicamos a segunda linha por $\frac{-1}{7}$, obtendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & -7 & (a^2-2) & a-14 \end{array}\right)$$

Multiplicamos então a segunda linha por 7 e somamos à terceira linha, obtendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & (a^2-16) & a-14 \end{array}\right)$$

Cálculos e respostas:

Agora devemos analisar três possíveis situações na terceira linha:

1. $a^2 - 16 = 0$ e $a - 4 = 0$. Se isso acontecer, o sistema linear possuirá infinitas soluções.
2. $a^2 - 16 = 0$ e $a - 4 \neq 0$. Se isso acontecer, o sistema linear não possuirá solução.
3. $a^2 - 16 \neq 0$ e $a - 4 = 0$. Se isso acontecer, o sistema linear possuirá uma única solução.

Logo, temos que: *a* deve ser igual 4 para que tenhamos infinitas soluções; *a* deve ser igual a -4 para o sistema linear não possuir solução; e *a* deve ser diferente de ± 4 para o sistema linear possuir uma única solução.

2ª QUESTÃO: (1,25 ponto)

Sejam *u*, *v* e *w* vetores do R^3. Se *v* e *w* forem vetores perpendiculares a *u*, mostre que qualquer combinação linear de *v* e *w* ainda é perpendicular a *u*.

Cálculos e respostas:

Sejam $v \in R^3$ e $w \in R^3$ vetores perpendiculares a $u \in R^3$. Então $< u,v > = 0$ e $< u,w > = 0$.

Seja $p \in R^3$ uma combinação linear de *v* e *w* dada por $p = av + bw$, onde $a \in R$ e $b \in R$.

Temos:

$$< u,p >=< u,av + bw >=< u,av > + < u,bw >=a < u,v > + b < u,w >= a0 + b0 = 0$$

como queríamos demonstrar.

3ª QUESTÃO: (1,25 ponto)

Suponha que y = y(x) seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde F(u,v) é suposta diferenciável. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de f.

Cálculos e respostas:

$u = x^2 + y,\ v = y^2$

$F(x^2 + y, y^2) - x = 0$. Derivando-se os dois lados desta expressão em relação a x tem-se:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial v}F(u,v)\right)\left(\frac{d}{dy}v(y)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)-1=0$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u,v)\right)x+\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u,v)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+2\left(\frac{\partial}{\partial v}F(u,v)\right)y\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)-1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u,v)\right)x-1}{\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u,v)\right)+2\left(\frac{\partial}{\partial v}F(u,v)\right)y}$$

4ª QUESTÃO: (1,25 ponto)

As coordenadas $(\vec{x},\vec{y})$ do centro de massa de uma lâmina ocupando a região D e tendo função densidade ρ(x,y) são:

$$\vec{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dA$$
$$\vec{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dA$$

onde a massa m é dada por:

$$m = \iint_D x\rho(x,y)\,dA$$

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices (0,0), (1,0) e (0,2) se a função densidade é $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.

Cálculos e respostas:

$$m := \int_0^1\int_0^{-2x+2} 1+3x+y\,dy\,dx, \quad m := \int_0^1 -2x+2+3x(-2x+2)+\frac{(-2x+2)^2}{2}dx$$

$$m := \frac{8}{3}$$

Centro de Massa – Chamando x de xx e y de yy tem-se:

$$xx := \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{-2x+2} x(1+3x+y)\,dy\,dx, \quad xx := \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{x(-2x+2)^2}{2} + x(1+3x)(-2x+2)\,dx, \quad xx := \frac{3}{8}$$

$$yy := \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{-2x+2} y(1+3x+y)\,dy\,dx, \quad yy := \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{(-2x+2)^3}{3} + \frac{(1+3x)(-2x+2)^2}{2}dx, \quad yy := \frac{11}{16}$$

Centro de Massa = $\left(\frac{3}{8},\frac{11}{16}\right)$

5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Considere uma partícula de massa m cujo vetor velocidade é dado por, $\vec{v}(t)=(2t\vec{i} + 3e\text{-}\,t\vec{j})(m/s)$ onde t é o tempo. Calcule os vetores posição, $\vec{r}(t)$, e aceleração, $\vec{a}(t)$, da partícula sendo $\vec{r}(0)=\vec{i}(m)$.

Cálculos e respostas:

Sabemos que a aceleração é a derivada

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

portanto,

$$\vec{a}(t) = (z\hat{i} - 3e^{-t}\,\hat{j})(m/s^2)$$

o vetor posição pode ser obtido através da integral

$$\vec{r}(t)\int \vec{v}(t)\,dt$$

o que resulta em

$$\vec{r}(t) = t^2\hat{i} - 3e^{-t}\hat{j} + \vec{c}$$

impondo a condição inicial

$$\vec{r}(0) = \hat{i}$$

obtemos

$$\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j}$$

o que resulta em

$$\vec{r}(t) = \left[(1+t^2)\hat{i} + 3(1-e^{-t})\hat{j}\right](m)$$

6ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Uma barra uniforme de comprimento L e massa m repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito. A barra possui um pivô, de modo que ela pode girar sem atrito em torno de um eixo passando por uma das extremidades. Um projétil se deslocando com velocidade v ortogonal à barra e paralela à superfície atinge o centro da barra e permanece retida em seu interior. Sendo a massa do projétil um quarto da massa da barra, (a) calcule a velocidade angular final da barra e (b) a razão entre a energia cinética do sistema depois da colisão e a energia cinética do projétil antes da colisão.

Dado:

- o momento de inércia da barra é $I = mL^2/3$

Cálculos e respostas:

Seja a origem no ponto fixo da barra

Como não há .... externos

$$\sum \vec{\delta}_{EAT} = \frac{d\vec{l}}{dt} = 0$$

O momento angular de conserva.

Logo,

$$L_i = L_f \Rightarrow L_i = rp = \frac{L}{2}.\frac{m}{4}.v = \frac{mLv}{8} \qquad (1)$$

o momento angular final é

$$L_F = Iw = \left[\frac{mL^2}{3} + \frac{m}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\omega \qquad (2)$$

igualando (1) e (2 temos

$$\omega = \frac{6v}{19L} \qquad (3)$$

b) A energia cinética no início é $K_i = \frac{1}{2}\frac{m}{4}v^2$

Enquanto que no final $K_F = \frac{1}{2}I\omega^2$. Usando (3)

$$\frac{K_F}{K_I} = \frac{I\omega^2}{2mv^2} - 8 = \frac{4I}{m}\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \frac{4I}{m}\left(\frac{6}{19L}\right)^2$$

Cálculos e respostas:

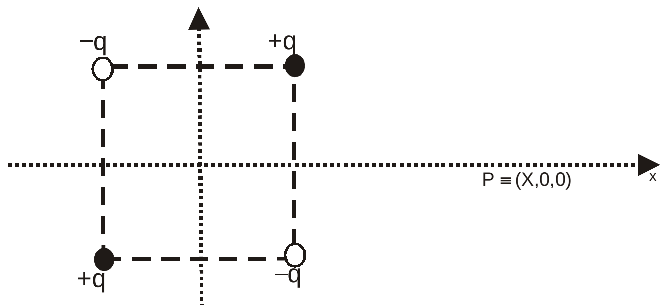
Como $I = \frac{mL^2}{3} + \frac{m}{4}.\frac{L^2}{4}$ Obtemos

$$\frac{K_F}{K_I} = \frac{3}{19}$$

7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Duas cargas puntiformes positivas iguais, +q, e duas cargas puntiformes negativas iguais, –q, se encontram fixas nos vértices de um quadrado de lado a = 20 cm. As cargas de mesmo sinal se localizam em vértices opostos. Utilize o sistema de coordenadas indicado na figura, cuja origem está no centro do quadrado e |q| = 5,0μC.

Dado:
$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$)

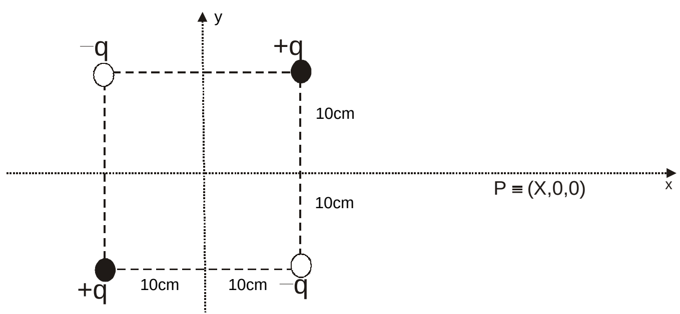


Calcule:

a) o potencial elétrico no ponto P;

b) o vetor campo elétrico no ponto P.

Cálculos e respostas:

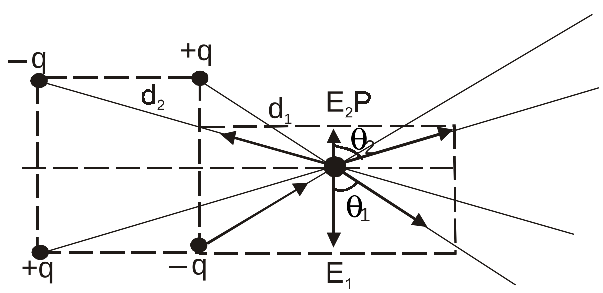


a) V(P)= onde r, é a distância entre P e a carga q;
Como para cada carga q_i a uma distância r_i, existe uma carga de sinal contrário a mesma distância, o potencial será <u>nulo</u>.

V(P) = 0

b) $\vec{E} = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon 0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$

As cargas distantes d1contribuem com campo na direção “-y” E_1



Cálculos e respostas:

d1=
$$\sqrt{10^2+(x-10)^2} \Rightarrow E_1 = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d_1}\cos\theta_1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 d_1}\frac{10}{d_1}$$

$$E_1 = \frac{5q}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[10^2+(x+20)^2\right]}$$

As cargas distantes d_2 contribuem com campo E_2 na dir "+y"

d$_2$ =
$$\sqrt{10^2+(x-10)^2} \Rightarrow E_2 = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d_2}\frac{\cos\theta_2}{d_2} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{10}{d_2}$$

$$E_1 = \frac{5q}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[10^2+(x+20)^2\right]}$$

$$\vec{E}(P) = (E_2 - E_1)\hat{j}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{5q}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{10^2+(x+20)^2} - \frac{1}{10^2+(x+20)^2}\right]\hat{j}$$

8ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

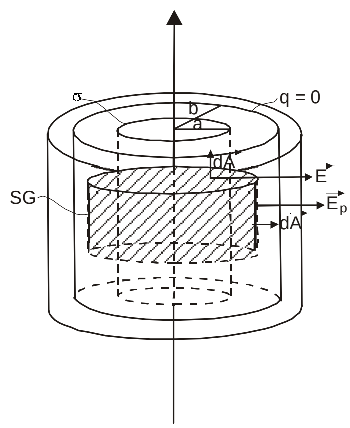
Um cilindro condutor de raio a tem uma densidade superficial de carga σ. Um segundo cilindro condutor neutro, de raio r = b (b > a), é posicionado com seu eixo coincidente com o eixo do primeiro cilindro.

Determine:

a) o campo elétrico $\vec{E}$ na região a < r < b;
b) a diferença de potencial entre as posições r = a e r = b;
c) a capacitância do sistema;
d) a densidade de carga nas superfícies interna e externa do segundo cilindro.

Cálculos e respostas:

a) Tomando a superfície gaussiano S_G cilíndrica da a<ρb



$$\oint \vec{E}.\vec{dA} = \frac{Q_{in}\alpha}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi\rho E = \frac{\sigma 2\pi a}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma a}{\rho\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma a}{\rho\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

b)

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}.\vec{d\ell}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\,d\rho \Rightarrow V_a - V_b = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ell n\frac{b}{a}$$

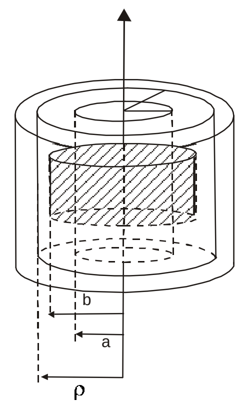
c)

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = \sigma 2\pi a h \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\sigma 2\pi a h}{\sigma a\,\ell n\, b/a}\varepsilon_0$$

$$C = 2\pi h\varepsilon_0 / \ell n\, b/a$$

Cálculos e respostas:

d) Como E = 0 no interior do cilindro condutor externo, pela Lei de Gauss, para uma sup. cilíndrica com ρ no interior do cilindro externo:



$$\oint \vec{E}.\vec{di} = 0 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow q_{\,supint} + q_a = 0$$

$$q_{\,supint} = -q_a = -\sigma 2\pi a h$$

$$\sigma_{supint} = \frac{\sigma 2\pi a h}{2\pi b h} \Rightarrow \sigma_{supint} = -\sigma \frac{a}{b}$$

Como o condutor é neutro, a carga total é nula e na sup externa há uma carga q_{supext} = - q_{supint} $\sigma_{supext} = +\sigma \dfrac{a}{b_{ext}}$