

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,5 pontos)



Seja R a região do plano limitada pelos gráficos das funções f e g definidas por:

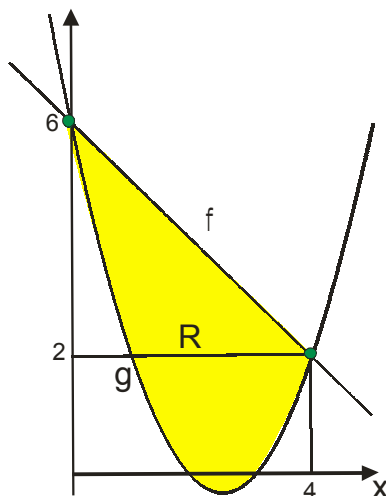
$$f(x) = -x + 6 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Esboce a região R e calcule a sua área.

Cálculos e respostas:

Os gráficos de f e g se intersectam nos pontos de abscissa x tais que $x^2 - 5x + 6 = -x + 6$, isto é, $0 = x^2 - 4x = x(x - 4)$, que é equivalente a $x = 0$ ou $x = 4$.

A seguir, esboçamos o gráfico da parábola $y = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, o gráfico de g, a reta $y = -x + 6$, o gráfico de f, e a região R.



Portanto, a área pedida é

$$\begin{aligned} \int_0^4 (6 - x - (x^2 - 5x + 6)) dx &= \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= -\frac{64}{3} + \frac{64}{2} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

2ª QUESTÃO: (2,5 pontos)



Faça, em cada item, o que se pede:

- a) Calcule $f'(\pi)$, onde $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$.
- b) Calcule $g'(x)$, onde $g(x) = \int_1^x \frac{t-1}{t^2+1} dt$.
- c) Determine o valor mínimo da função $h(x) = x^3 - 9x$ no intervalo $\left[-\frac{7}{2}, 2\right]$.

Cálculos e respostas:

a) Seja $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$.

Pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{3} + \pi\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{3} + \pi\right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \sin\left(\frac{x}{3} + \pi\right) \cos\left(\frac{x}{3} + \pi\right) \end{aligned}$$

Substituindo no ponto dado, temos

$$f'(\pi) = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

- b) A função $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ é contínua no intervalo com extremos 1 e x, para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$g'(x) = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

- c) Os pontos críticos de h são dados por $h'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) = 0$, $x \in \left(-\frac{7}{2}, 2\right)$.

Como $-\frac{7}{2} = -3,5 < -\sqrt{3} < \sqrt{3} < 2$, então $a = -\sqrt{3}$ e $b = \sqrt{3}$ são os pontos críticos.

Como $h''(x) = 6x$, temos que $h''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$ e $h''(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0$, concluímos que $b = \sqrt{3}$ é o único ponto de mínimo local.

PROAC / COSEAC - CURSO de MATEMÁTICA (Niterói) - Gabarito

Cálculos e respostas:

Como h é contínua em $\left[-\frac{7}{2}, 2\right]$, o valor mínimo de h ocorre em b ou em um dos extremos do intervalo anterior.

Avaliando h no ponto de mínimo local e nos extremos, obtemos:

$$h(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3},$$

$$h\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{7^3}{2^3} + 9\frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{49}{4} - 9\right) = -\frac{7}{2} \cdot \frac{13}{4} = -\frac{91}{8}$$

$$h(2) = 8 - 18 = -10.$$

Comparando esses valores temos que $-\frac{91}{8} < -6\sqrt{3} < -10$.

Assim, h assume em $x = -\frac{7}{2}$ o valor mínimo $h\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{91}{8}$ no intervalo $\left[-\frac{7}{2}, 2\right]$.

3ª QUESTÃO: (2,5 pontos)



Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$ e $w = (2,-1,1)$.
Determine equações para W e dê a sua dimensão.

Cálculos e respostas:

$$(x, y, z) \in W \Leftrightarrow (x, y, z) = a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(2,-1,1), \text{ para } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Logo, devemos encontrar condições sobre x, y, z para que o sistema abaixo tenha solução.

$$a + 2c = x$$

$$b - c = y$$

$$a + b + c = z$$

Reduzindo por linhas à forma em escada a matriz ampliada associada ao sistema linear acima, obtemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z-x \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x-y \end{array} \right)$$

Portanto,
o sistema tem solução se, e somente se, $z - x - y = 0$

se, e somente se, $x + y - z = 0$.

Então,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

Geometricamente, W é um plano no $\mathbb{R}^3$, um sistema linear homogêneo de uma equação com duas incógnitas, cujo grau de liberdade é dois, mostrando que a dimensão de W é dois.

4ª QUESTÃO: (2,5 pontos)



Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que:

$$T(1,0,1) = (1,1,1), T(0,1,1) = (1,0,-1) \text{ e } T(0,0,1) = (-1,1,0).$$

Cálculos e respostas:

Primeiramente, escrevemos (x,y,z) como combinação linear de $(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(0,0,1) \\ &= (a,b,a+b+c) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = a + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z - a - b = z - x - y \end{cases}$$

Portanto,

$$(x,y,z) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + (z - x - y)(0,0,1)$$

$$T(x,y,z) = xT(1,0,1) + yT(0,1,1) + (z - x - y)T(0,0,1)$$

$$= x(1,1,1) + y(1,0,-1) + (z - x - y)(-1,1,0)$$

$$= (x + y - z + x + y, x + z - x - y, x - y)$$

$$= (2x + 2y - z, -y + z, x - y)$$