UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TRANSFERÊNCIA – 2º semestre letivo de 2006 e 1º semestre letivo de 2007

CURSO de MATEMÁTICA (Niterói) - Gabarito

INSTRUÇÕES AO CANDIDATO

- Verifique se este caderno contém:
  PROVA DE **REDAÇÃO** – enunciadas duas propostas;
  PROVA DE **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS** - enunciadas questões discursivas, totalizando dez pontos.
- Se este caderno não contiver integralmente o descrito no item anterior, notifique imediatamente ao fiscal.
- No espaço reservado à identificação do candidato, além de assinar, preencha o campo respectivo com seu nome.
- Não é permitido fazer uso de instrumentos auxiliares para o cálculo e o desenho, portar material que sirva para consulta nem equipamento destinado à comunicação.
- Na avaliação do desenvolvimento das questões será considerado somente o que estiver escrito a caneta, com tinta azul ou preta, nos espaços apropriados.
- O tempo disponível para realizar estas provas é de quatro horas.
- Ao terminar, entregue ao fiscal este caderno devidamente assinado. Tanto a falta de assinatura quanto a assinatura fora do local apropriado poderá invalidar sua prova.
- Certifique-se de ter assinado a lista de presença.
- Colabore com o fiscal, caso este o convide a comprovar sua identidade por impressão digital.
- Você deverá permanecer no local de realização das provas por, no mínimo, noventa minutos.

AGUARDE O AVISO PARA O INÍCIO DA PROVA

proac

coseac

RESERVADO À IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

NOME

ASSINATURA : ______________________

RESERVADO AOS AVALIADORES

REDAÇÃO			rubrica: ___________
C. ESPECÍFICOS			rubrica: ___________

PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Faça, em cada item, o que se pede:

a) calcule f'(1), onde $f(x) = \cos(\log_2(x))$;

b) calcule $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

Cálculos e respostas:

a) Pela regra da cadeia, segue que

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\log_2(x)) \cdot (\log_2(x))' = -\operatorname{sen}(\log_2(x)) \cdot \frac{1}{x\log 2}.$$

Assim $f'(1) = -\operatorname{sen}(\log_2(1)) \cdot \frac{1}{\log 2} = -\operatorname{sen}(0) \cdot \frac{1}{\log 2} = 0$

b) Fazendo $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, obtemos $du = dx$ e $v = -\cos x$. Aplicando o método de integração por partes, a integral procurada é

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x)\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c \;,$$

onde c é uma constante qualquer.

PROAC / COSEAC - Gabarito

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Faça um esboço detalhado da região R limitada pelo gráfico das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Determine a área da região R .

(Indicação: Para esboçar corretamente a região R deve-se determinar os pontos de interseção dos gráficos de f e g.)

Cálculos e respostas:

Os gráficos das funções se intersectam nos pontos tais que $x = x^2 - 1$, isto é, $x^2 - x - 1 = 0$.

Resolvendo essa equação, obtemos as raízes $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Como a reta $y = x$ está acima da parábola $y = x^2 - 1$, para $x \in [a, b]$, temos:

$$
\begin{aligned}
\text{Área (R)} &= \int_a^b (x-(x^2-1))dx \\
&= \int_a^b (-x^2+x+1)dx \\
&= \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big]_a^b \\
&= \frac{-2x^3+3x^2+6x}{6}\Big]_a^b \\
&= h(b) - h(a), \text{ onde } h(x) = \frac{-2x^3+3x^2+6x}{6}
\end{aligned}
$$

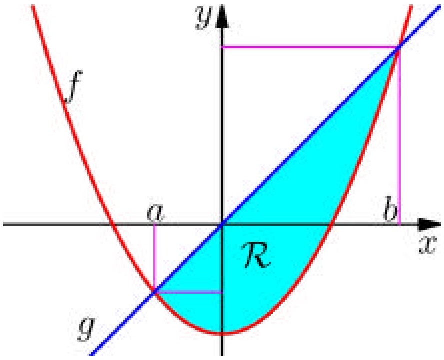


Fig. 1: Gráficos de f, g e esboço da região R .

Para calcularmos o valor da área, observamos que para $x \in \{a,b\}$ temos

(1) $x = x^2 - 1$, que é equivalente a $x^2 = x + 1$;

(2) $x^3 = x \cdot x^2 = x(x + 1) = x^2 + x = (x + 1) + x = 2x + 1$;

(3) $h(x) = \frac{-2x^3+3x^2+6x}{6} = \frac{-2(2x+1)+3(x+1)+6x}{6} = \frac{5x+1}{6}$

Portanto, $\text{Área (R)} = \frac{5\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1}{6} - \frac{5\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+1}{6} = \frac{5+5\sqrt{5}+2-(5-5\sqrt{5}+2)}{12} = \frac{10\sqrt{5}}{12} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$.

PROAC / COSEAC - Gabarito

3ª QUESTÃO: (3,0 pontos)

Considere a função $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x-4}$. Determine:

a) o domínio de f;
b) os pontos onde f não é contínua, caso existam;
c) as assíntotas horizontais e verticais, caso existam;
d) os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente;
e) os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam;
f) os intervalos onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e os pontos onde f tem a concavidade voltada para baixo;
g) os pontos de inflexão do gráfico de f, caso existam;
h) o esboço do gráfico de f.

Cálculos e respostas:

a) Dom(f) = $\{x \in \mathbb{R} ; x \neq 2\}$
b) Como f é um quociente de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ - {2}, segue que f é contínua em todo ponto de seu domínio.
c) A candidata a assíntota vertical é a reta x = 2. Como

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-5}{2x-4} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x-5}{2x-4} = -\infty$, segue que, de fato, a reta x = 2 é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-5}{2x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\frac{5}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \dfrac{3}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-5}{2x-4}$, segue que a reta $y = \dfrac{3}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

d) Calculando-se a derivada de f, obtemos

$f'(x)=\dfrac{-2}{(2x-4)^2}$. Assim, f'(x) < 0 para todo $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, o que implica que f é decrescente em $\mathbb{R} - \{2\}$.

e) Como f é decrescente em seu domínio de definição, segue que f não possui nem máximo nem mínimo relativo.
f) Calculando-se a derivada segunda de f, obtemos

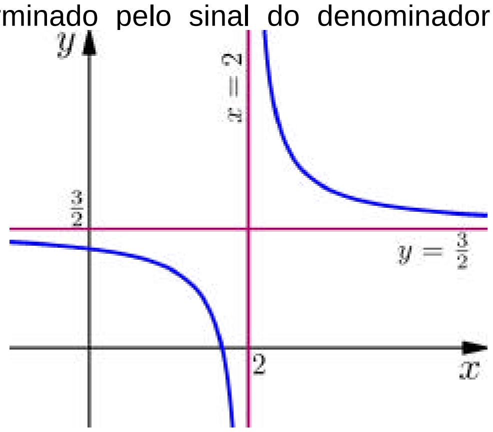
$f''(x) = \dfrac{8}{(2x-4)^3}$. Assim, o sinal de f" é determinado pelo sinal do denominador e, portanto,

Cálculos e respostas:

pelo sinal de 2x – 4. Dado que 2x – 4 < 0 se $x \in (-\infty, 2)$ e 2x – 4 > 0 se $x \in (2, +\infty)$, segue que o gráfico de f tem concavidade para baixo em $(-\infty, 2)$ e concavidade para cima em $(2, +\infty)$.

g) Visto que a mudança de sinal da derivada segunda de f ocorre no ponto x = 2 que não pertence ao domínio de f, segue que seu gráfico não possui pontos de inflexão.

h) Ver gráfico ao lado.

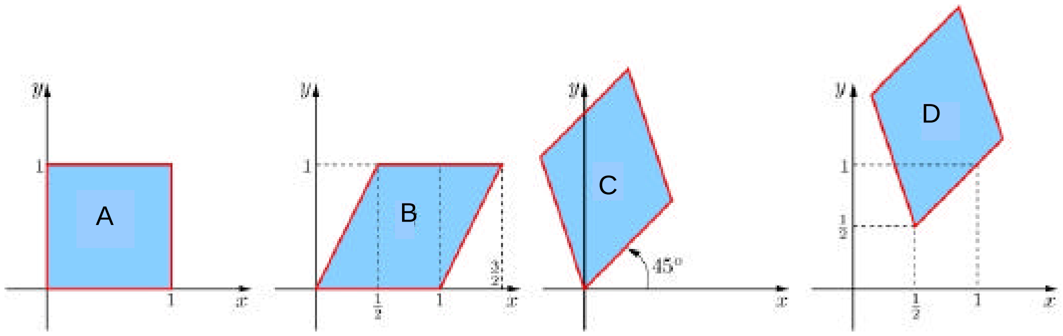


Item (h). Gráfico de f e suas assíntotas.

PROAC / COSEAC - Gabarito

4ª QUESTÃO: **(2,0 pontos)**

Considere os paralelogramos A, B, C e D dados nas figuras abaixo, onde A é um quadrado, C é obtido de B por uma rotação de 45^o no sentido anti-horário e D é obtido de C por uma translação.



a) Determine as matrizes que representam as transformações lineares S, $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em relação à base canônica, onde S transforma o quadrado A no paralelogramo B e T transforma o quadrado A no paralelogramo C.

b) Sejam c a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e β uma base de $\mathbb{R}^2$.

Determine a base β tal que $[T]^c_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde T é a transformação do item (**a**), c é a base do domínio de T e β é a base do contradomínio de T.

c) Seja $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação afim L(x, y) = (ax + by, cx + dy) + (e, f).
Determine a, b, c, d, e, f de modo que L transforme o quadrado A no paralelogramo D.

Cálculos e respostas:

a) Primeiramente, seja $R:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação de 45^o no sentido anti-horário.

Sabemos que R é uma transformação linear, R(1,0) = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e R(0,1) = $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Como toda transformação linear está perfeitamente determinada se é dada numa base do seu domínio, a imagem de uma combinação linear de dois vetores é a combinação linear das suas imagens, a composição de transformações lineares é linear, o conjunto {(1,0), (0,1)} é base do $\mathbb{R}^2$, temos:

- S transforma o quadrado A no paralelogramo B $\Leftrightarrow$ S (1,0) = (1,0) e S(0,1) = $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$;
- T transforma o quadrado A no paralelogramo C se, e somente se, T = R o S se, e somente se,

$$T(1,0) = R(S(1,0)) = R(1,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Cálculos e respostas:

e

$$T(0,1) = R(S(0,1)) = R\left(\frac{1}{2},1\right)$$

$$= R\left(\frac{1}{2},0\right) + R(0,1)$$

$$= \frac{1}{2}R(1,0) + R(0,1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4},3\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Portanto, matriz de S = $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e matriz de T = $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$.

Como a matriz de R, na base canônica do $\mathbb{R}^2$, é $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, então a matriz de T também pode ser obtida por

matriz de T = matriz de (R o S) = (matriz de R) . (matriz de S) = $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Seja $\beta = \{v,w\}$.

Como c = {(1,0), (0,1)}, então $[T]_\beta^c = \left([T(1,0)]_\beta \;\; [T(0,1)]_\beta\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se, e somente se,

T(1,0) = 1v + 0w = v e T(0,1) = 0v + 1w = w.

Logo, v = T(1,0) = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e w = T(0,1) = $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},3\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Cálculos e respostas:

c) O paralelogramo D é a translação do paralelogramo C, logo a transformação afim L que transforma A em D é a composição U o T, onde $U:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a translação definida por U(x,y) = (x,y) + $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e T é a transformação linear do item **a**.

Da matriz de T na base canônica obtemos T(x,y) = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3\frac{\sqrt{2}}{4}y\right)$.

Logo, L(x,y) = U(T(x,y)) = T(x,y) + $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3\frac{\sqrt{2}}{4}y\right) + \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Portanto, a = c = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b = $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, d = $3\frac{\sqrt{2}}{4}$, e = f = $\frac{1}{2}$.

PROAC / COSEAC - Gabarito

5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Determine uma transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores u = (1,2,0) e v = (1,0,1) e a imagem é gerada pelo vetor (1,1,1).

Cálculos e respostas:

Dado que os vetores u e v são linearmente independentes, se tomarmos w = (0,0,1), segue que β = {u,v,w} é uma base de $\mathbb{R}^3$. Para obter uma tal transformação linear basta defini-la convenientemente nos vetores da base. Tome assim,

T(u) = (0,0,0), T(v) = (0,0,0) e T(w) = (1,1,1).

Agora, escrevendo um vetor qualquer (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores u, v e w, obtemos

$$(x,y,z) = \frac{y}{2}(1,2,0) + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,0,1) + \left(z - x + \frac{y}{2}\right)(0,0,1).$$

A transformação T procurada, sendo linear, é dada por

$$T(x,y,z) = \frac{y}{2}T(1,2,0) + \left(x - \frac{y}{2}\right)T(1,0,1) + \left(z - x + \frac{y}{2}\right)T(0,0,1),$$

ou seja,

$$T(x,y,z) = \left(z - x + \frac{y}{2}, z - x + \frac{y}{2}, z - x + \frac{y}{2}\right).$$