



**PROAC / COSEAC**

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (1,5 ponto)



Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}$ .

Determine:

- a) seu domínio;
- b) as equações das assíntotas horizontais e verticais, caso existam;
- c) os intervalos em que a função é crescente e onde é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo locais, caso existam;
- d) os intervalos em que o gráfico tem concavidade voltada para cima e onde tem concavidade voltada para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam;
- e) um esboço de seu gráfico.

Cálculos e respostas:

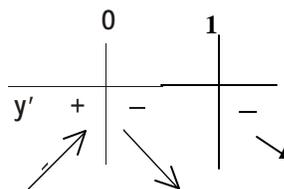
$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}$$

a) Domínio:  $\mathbb{R} - \{1\}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x}}{x-1} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x}}{x-1} = -\infty \Rightarrow$  é ass. vertical

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(x-1)} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$ ;  $y = 0$  é ass. horizontal

c)  $y' = \frac{-xe^{-x}}{(x-1)^2} \rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$

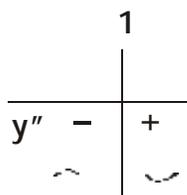


$f$  é crescente se  $x < 0$  e decrescente se  $x > 0$  ( $0, -1$ ) é

# PROAC / COSEAC - Gabarito

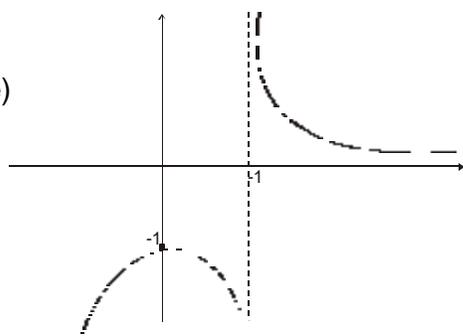
Cálculos e respostas:

$$d) y'' = \frac{e^{-x}(x^2 + 1)}{(x-1)^3} \neq 0$$



Se  $x < 1$  o gráfico tem c v b  
 $x > 1$  o gráfico tem c v c  
não tem ponto de inflexão ( $x \neq 1$ )

e)



## PROAC / COSEAC - Gabarito

### 2ª QUESTÃO: (0,5 ponto)

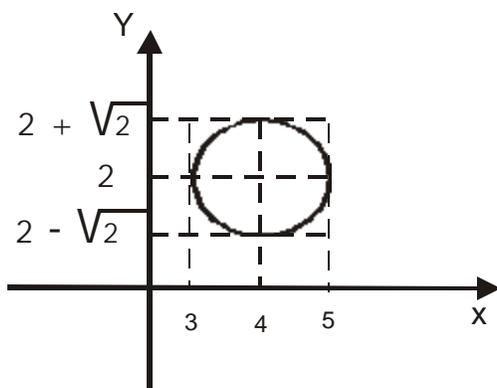


Considere a equação  $2x^2 + y^2 - 16x - 4y + 34 = 0$ .  
Identifique a cônica que ela representa e faça um esboço do seu gráfico.

$$2(x^2 - 8x + 16) - 32 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + 34 = 0$$

$$2(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 2 \longrightarrow (x - 4)^2 + \frac{(y - 2)^2}{2} = 1$$

elipse com centro em (4, 2)



## PROAC / COSEAC - Gabarito

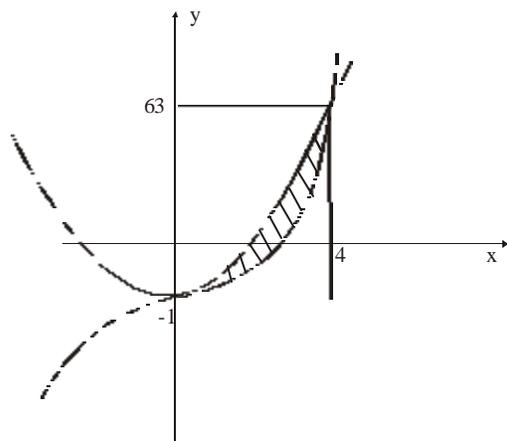
### 3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Calcule a área da região do plano limitada pelas curvas de equações  $y = x^3 - 1$  e  $y = 4x^2 - 1$ .

Cálculos e respostas:

$$\begin{cases} y = x^3 - 1 \\ y = 4x^2 - 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 4x^2 - 1 \\ x^3 - 4x^2 &= 0 \\ x^2(x - 4) &= 0 \\ x &= 0 \text{ ou } x = 4 \\ \text{para } 0 < x < 4 \\ 4x^2 &> x^3 \end{aligned}$$

$$A = \int_0^4 (4x^2 - 1 - x^3 + 1) dx$$

$$= \left( \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)_0^4 = \frac{256}{3} - \frac{256}{4} = \frac{256}{12} = \frac{64}{3} \text{ .u.a.}$$

## PROAC / COSEAC - Gabarito

### 4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Considere a função  $z = \ln(x^2 + y^2)$ . Mostre que  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

Cálculos e respostas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ c.q.d.}$$

## PROAC / COSEAC - Gabarito

### 5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Considere a Matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Determine:

- a) o determinante de A
- b) a transposta e a inversa de A
- c) os autovalores de A

Cálculos e respostas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a)  $\det A = 1 + 1 + 2 = 4$

b)  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$      $\text{Cof } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Cof } A)^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) autovalor:  $\det (A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

## PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

$$(1 - \lambda)^3 + (1 - \lambda) + 2(1 - \lambda) = 0$$

$$(1 - \lambda)^3 + 3(1 - \lambda) = 0$$

$$(\lambda - 1)[(1 - \lambda)^2 + 3] = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

## PROAC / COSEAC - Gabarito

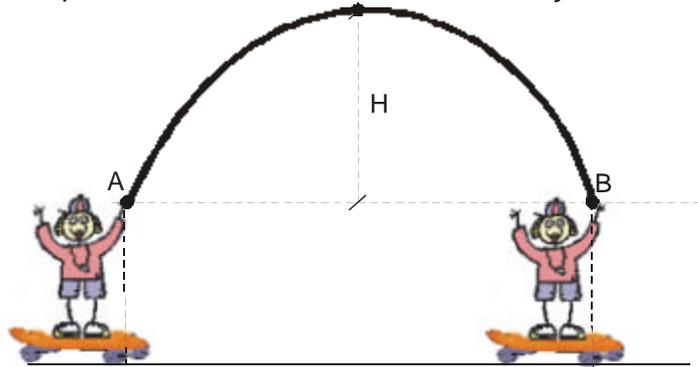
### 6ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Um menino está andando de “skate”, em trajetória retilínea, numa calçada horizontal lisa, com velocidade constante igual a 2,5 m/s.

No ponto A, ele lança para cima uma bolinha de gude com velocidade vertical igual a 4,0 m/s e a apanha de volta no ponto B.

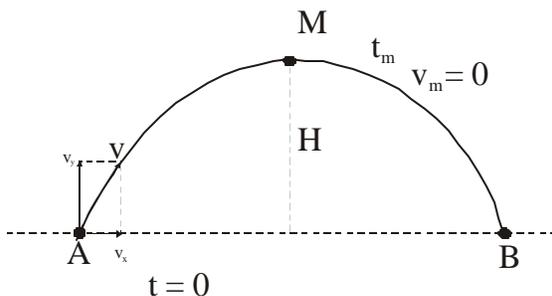
Considere desprezível a resistência do ar e faça os cálculos utilizando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Determine:

- a altura máxima  $H$  atingida pela bolinha;
- o valor da distância horizontal  $AB$ .

Cálculos e respostas:



$$v_x = 2,5 \text{ m/s}$$

$$v_y = 4,0 \text{ m/s}$$

- no ponto M:

$$\text{na vertical: } v_m^2 = v_y^2 - 2gH$$

$$2gH = v_y^2 \quad \therefore H = \frac{v_y^2}{2g}$$

$$H = \frac{16}{20} = 0,8 \quad \therefore H = 0,80 \text{ m} \quad \therefore H = 80 \text{ cm}$$

## PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

b) no ponto M:

$$\text{na vertical: } v_m = v_y - gt_m$$

$$gt_m = v_y \quad \therefore \quad t_m = \frac{v_y}{g}$$

$$t_m = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ s}$$

$$\text{no ponto B : } t_B = 2t_m = 2 \times 0,4 = 0,8 \text{ s}$$

na horizontal:

$$\overline{AB} = v_x \cdot t_B \quad \therefore \quad \overline{AB} = 2,5 \times 0,8 = 2 \text{ m}$$

$$\overline{AB} = 2,0 \text{ m}$$

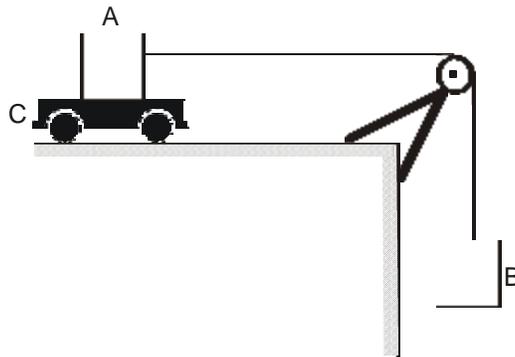
## PROAC / COSEAC - Gabarito

### 7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Dois blocos A e B, de massas iguais a  $m$ , estão ligados por um fio leve e flexível que passa por uma polia de massa desprezível, que gira sem atrito. O bloco A está apoiado sobre um carrinho C de massa  $4 m$ , que pode se deslocar sobre a superfície horizontal lisa.

Faça  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Quando o conjunto é liberado, o bloco B desce e o bloco A se desloca sobre o carrinho. Nesta situação a força de atrito entre o bloco A e o carrinho C é constante e vale,

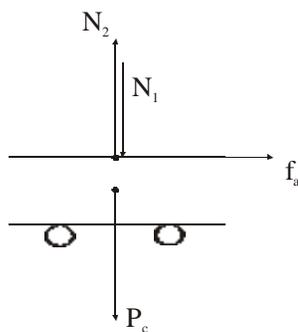
Calcule:

a) a aceleração do carrinho;

b) a relação  $\frac{T}{m}$ , sendo  $T$  o módulo da força de tração no fio.

Cálculos e respostas:

a) Isolando o carrinho:



$$f_a = 0,2 mg$$

Pela 2ª lei de Newton:  $R = m \cdot a$

$$f_a = 4m \cdot a_c$$

$$0,2 mg = 4 m \cdot a_c \quad \therefore \quad a_c = \frac{0,2 \times 10}{4}$$

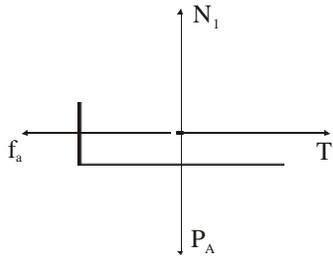
$$a_c = 0,5 \text{ m/s}^2$$

## PROAC / COSEAC - Gabarito

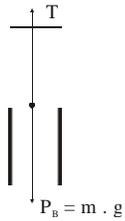
Cálculos e respostas:

b) Isolando os blocos A e B e aplicando a 2ª lei de Newton em cada caso:

Bloco A



Bloco B



$$T - f_a = m \cdot a$$

$$P_B - T = m \cdot a$$

$$P_B - f_a = 2m \cdot a \quad \therefore m \cdot g - f_a = 2m \cdot a$$

$$mg - 0,2mg = 2ma \quad \therefore 0,8mg = 2ma$$

$$a = \frac{0,8 \times 10}{2} \quad \therefore a = 4 \text{ m/s}^2$$

$$T = f_a + ma = 0,2mg + m \times 4 \quad \therefore T = 2m + 4m = 6m$$

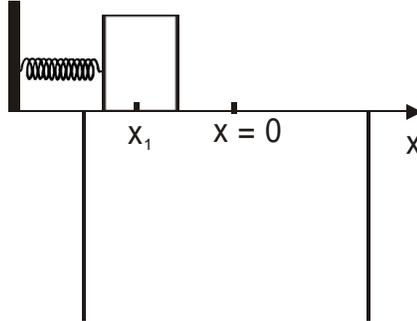
$$\frac{T}{m} = 6$$

## PROAC / COSEAC - Gabarito

### 8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Um bloco de massa igual a 4,0 kg está apoiado sobre uma mesa horizontal sem atrito e ligado a uma mola ideal cuja constante de força é  $k = 4,0 \times 10^2$  N/m. A posição  $x = 0$ , na figura abaixo, indica a posição de equilíbrio da mola.



Calcule:

- o trabalho realizado pela mola quando o bloco se desloca da posição  $x_1 = -5,0$  cm até a posição de equilíbrio;
- a velocidade escalar do bloco ao atingir a posição de equilíbrio.

$$\text{a) } W = \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}$$

$$W = 50 \cdot 10^{-2} \quad \therefore \quad W = 0,50 \text{ J}$$

$$\text{b) } \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ x_1 & x = 0 \end{array}$$

$$E_{m_A} = E_{m_B} \quad E_{p_{elA}} = W$$

$$E_{p_{elA}} = E_{c_B}$$

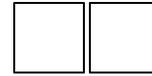
$$W = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_B^2 = \frac{2W}{m} \quad \therefore \quad v_B^2 = \frac{2 \times 0,5}{4} = \frac{1}{4}$$

$$v_B = 0,50 \text{ m/s}$$

**PROAC / COSEAC - Gabarito**

**9ª QUESTÃO: (1,0 ponto)**



Uma bola de material muito leve é mantida submersa dentro de um tanque com água, por meio de um fio preso ao fundo do tanque. O volume da bola é igual a  $200 \text{ cm}^3$ , sua massa é igual a  $40\text{g}$  e seu centro está a  $50 \text{ cm}$  da superfície livre da água (figura 1). Cortando-se o fio, observa-se que a bola sobe, salta fora da água e seu centro atinge uma altura  $h$  acima da superfície (figura 2).

Dados: massa específica da água:  $1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$   
 $g = 10 \text{ m/s}^2$

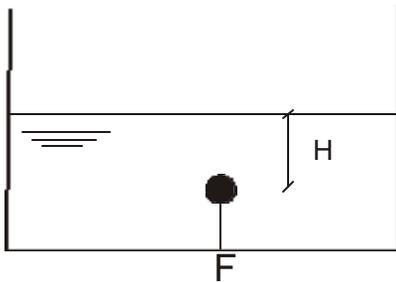


figura 1

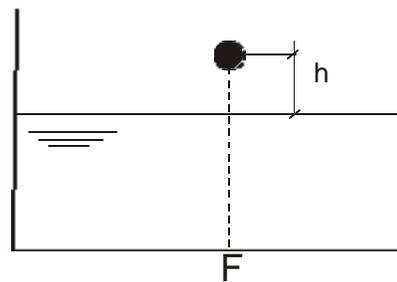
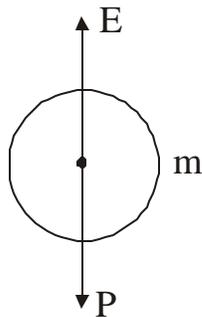


figura 2

Informe se, nestas condições, é possível que o valor de  $h$  seja maior que  $2,0 \text{ m}$ . Justifique sua resposta.

**Cálculos e respostas:**

O valor máximo de  $h$  ocorrerá quando não houver nenhuma dissipação de energia no processo. Quando imersa na água, atuarão sobre a bola apenas o peso  $P$  e o empuxo  $E$  e no ar apenas o peso  $P$ . Nestas condições, calculando o valor de  $h$ :



$m$ : massa da bola

$$E - P = m \cdot a \quad \therefore \quad a = \frac{E - P}{m}$$

$$a = \frac{V_s \cdot \rho_L \cdot g - mg}{m} \quad \therefore \quad a = \frac{200 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^3 \times 10 - 40 \times 10^{-3} \times 10}{40 \times 10^{-3}}$$

$$a = 40 \text{ m/s}^2$$

## PROAC / COSEAC - Gabarito

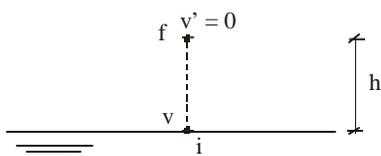
Cálculos e respostas:

Calculando a velocidade da bola ao atingir a superfície da água:

$$v^2 = v_0^2 + 2a H \quad \therefore \quad v^2 = 2 \times 40 \times 0,5 = 40$$

$$v = \sqrt{40} \text{ m/s}$$

No ar:



$$E_{p_i} = 0; \quad E_{c_f} = 0$$

$$E_{m_i} = E_{m_f} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \therefore \quad h = \frac{v^2}{2g} \quad \therefore \quad h = \frac{40}{20}$$

$$h = 2,0 \text{ m}$$

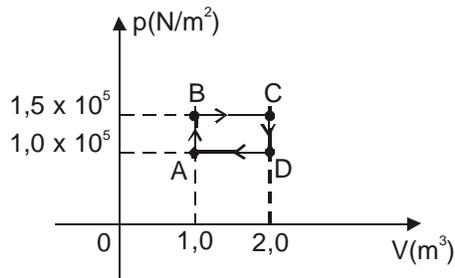
Logo não é possível que h seja maior que 2,0 m.

## PROAC / COSEAC - Gabarito

### 10ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Uma máquina térmica industrial utiliza um gás ideal operando de acordo com o ciclo apresentado na figura. A temperatura no ponto A é igual a 400 K.



Calcule:

- a temperatura no ponto C;
- a quantidade de calor trocada pelo gás com o ambiente ao longo de um ciclo.

a)

$$\frac{p_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{p_C \cdot V_C}{T_C}$$

$$\frac{1 \times 10^5 \times 1}{400} = \frac{1,5 \times 10^5 \times 2}{T_C}$$

$$T_C = 1200 \text{ K} \quad \therefore T_C = 1,2 \times 10^3 \text{ K}$$

b)  $Q - W = \Delta U$

num ciclo:  $\Delta U = 0$

$$Q = W$$

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$

$$W_{AB} = W_{CD} = 0 \text{ (volume constante)}$$

$$W_{BC} = 1,5 \times 10^5 \times (2 - 1) = 1,5 \times 10^5 \text{ J}$$

$$W_{DA} = 1,0 \times 10^5 \times (1 - 2) = -1,0 \times 10^5 \text{ J}$$

$$W = 1,5 \times 10^5 - 1,0 \times 10^5 \quad \therefore W = 0,5 \times 10^5 \text{ J} = Q$$

$$Q = 5,0 \times 10^4 \text{ J}$$