UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TRANSFERÊNCIA – 2º semestre letivo de 2005 e 1º semestre letivo de 2006

CURSO de MATEMÁTICA (Niterói) - Gabarito

INSTRUÇÕES AO CANDIDATO

- Verifique se este caderno contém:

  PROVA DE **REDAÇÃO** – enunciadas duas propostas;

  PROVA DE **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS** - enunciadas questões discursivas totalizando dez pontos.
- Se este caderno não contiver integralmente o descrito no item anterior, notifique imediatamente ao fiscal.
- No espaço reservado à identificação do candidato, além de assinar, preencha o campo respectivo com seu nome.
- Não é permitido fazer uso de instrumentos auxiliares para o cálculo e o desenho, portar material que sirva para consulta nem equipamento destinado à comunicação.
- Na avaliação do desenvolvimento das questões será considerado somente o que estiver escrito a caneta, com tinta azul ou preta, nos espaços apropriados.
- O tempo disponível para realizar estas provas é de quatro horas.
- Ao terminar, entregue ao fiscal este caderno devidamente assinado. Tanto a falta de assinatura quanto a assinatura fora do local apropriado poderá invalidar sua prova.
- Certifique-se de ter assinado a lista de presença.
- Colabore com o fiscal, caso este o convide a comprovar sua identidade por impressão digital.
- Você deverá permanecer no local de realização das provas por, no mínimo, noventa minutos.

AGUARDE O AVISO PARA O INÍCIO DA PROVA

proac

coseac

RESERVADO À IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

NOME

ASSINATURA : ____________________

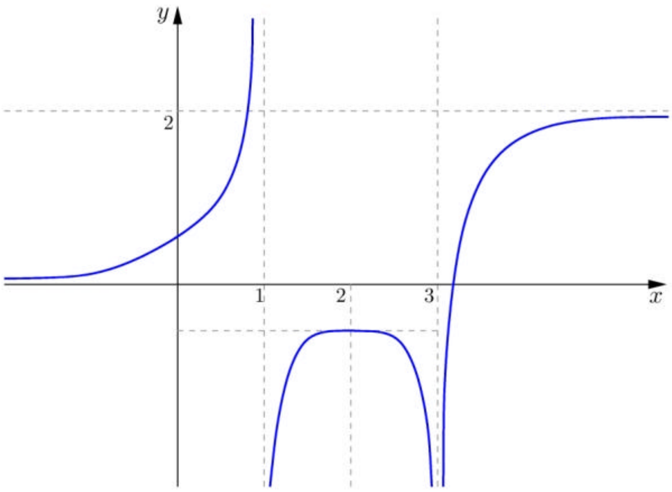
RESERVADO AOS AVALIADORES

REDAÇÃO			rubrica: ___________
C. ESPECÍFICOS			rubrica: ___________

PROAC / COSEAC - Gabarito
Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere a função f(x) cujo gráfico é dado na figura abaixo:



a) Calcule, caso existam, os limites:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to1} f(x)$ e $\lim_{x\to3} f(x)$.

b) Dê os intervalos onde f'(x) > 0.

c) Dê os intervalos onde f"(x) > 0.

Cálculos e respostas:

a)
Para x + ∞ a função é crescente e os seus valores se aproximam de 2.
Portanto, $\lim_{x \quad +\infty} f(x) = 2$.
Para x – ∞ os valores da função são positivos e se aproximam de 0.
Portanto, $\lim_{x \quad -\infty} f(x) = 0$.
Quando x se aproxima de 1 pela esquerda os valores da função tendem a + ∞, e quando x se aproxima de 1 pela direita, os valores de f(x) tendem a – ∞.
Portanto, $\lim_{x \quad 1} f(x)$ não existe.
Quando x se aproxima de 3 pela esquerda os valores de f(x) tendem a – ∞, e quando x se aproxima de 3 pela direita, os valores de f(x) tendem, também, a – ∞.
Portanto, $\lim_{x \quad 1} f(x) = -\infty$.

Cálculos e respostas:

b) f '(x) > 0 nos intervalos (– ∞,1), (1,2) e (3,+ ∞) pois, nesses intervalos, f(x) é (estritamente) crescente.

c) f ''(x) > 0 apenas no intervalo (– ∞,l), pois nesse intervalo a inclinação da reta tangente ao gráfico em cada ponto aumenta conforme x aumenta.
Isto é, f(x) tem a sua concavidade voltada para cima.

$2^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere as funções $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = e^x$.

a) Calcule f(g(1)) e (f o g) o (f o g) (0).

b) Determine e dê o domínio da função g o f.

c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g o f no ponto (1, e).

Cálculos e respostas:

a)

Temos $\quad f(g(1)) = f(e^1) = f(e) = \dfrac{1}{e}$,

e, sendo que $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(e^0) = f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$,

concluímos

$$(f \circ g) \circ (f \circ g)(0) = (f \circ g)((f \circ g)(0)) = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = \frac{1}{e}.$$

b) Como o domínio de g é todo o $\mathbb{R}$, o domínio de g o f consiste dos números $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) \in \mathbb{R}$, ou seja

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

c) A inclinação da reta tangente ao gráfico de g o f no ponto (1, e) é o número

$$m = (g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(1) \cdot f'(1).$$

Como $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ e $g'(x) = e^x$, temos

$$m = e^1 \cdot \left(-\frac{1}{1^2}\right) = -e.$$

Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de g o f no ponto (1, e) é

$y - e = m(x - 1)$, isto é, $y - e = -e(x - 1)$, ou ainda $y = e(2 - x)$.

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere as curvas

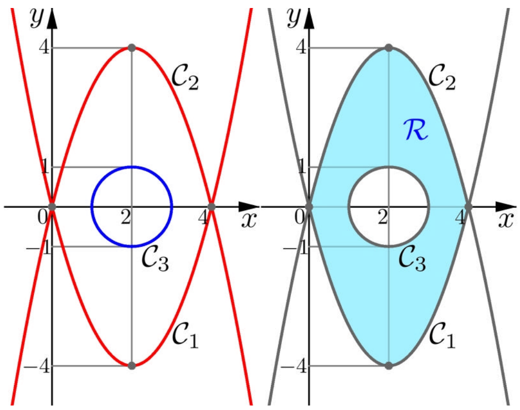
$C_1 : y = x^2 - 4x$; $C_2 : y = x(4 - x)$;

e seja C_3 o círculo de centro (2,0) e raio 1.

a) Faça o esboço do gráfico das três curvas num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.
b) Faça o esboço da região $\mathcal{R}$ exterior àcurva C_3 e limitada pelas curvas C_1 e C_2.
c) Calcule a área da região $\mathcal{R}$.

Cálculos e respostas:

a)



b)
Como a região $\mathcal{R}$ é simétrica em relação ao eixo x, temos

área $\mathcal{R}$ = 2 . área $\mathcal{R}$’,
onde $\mathcal{R}$’ é a parte da região $\mathcal{R}$ que fica acima do eixo x.
Logo,

área $\mathcal{R}$’ = área (região abaixo de C_2 e acima do eixo x)
– área (região abaixo de C_3 e acima do eixo x),
onde

área (região abaixo de C_2 e acima do eixo x) = $\int_0^4 x(4-x)dx = 4\int_0^4 xdx - \int_0^4 x^2dx$

$$= 4\frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Como a área da região limitada pelo círculo C_3 é π, temos

área (região abaixo de C_3 e acima do eixo x) = $\frac{\pi}{2}$

Cálculos e respostas:

Logo, área $(\mathcal{R}') = \dfrac{32}{3} - \dfrac{\pi}{2}$ e, portanto,

área$(\mathcal{R}) = \dfrac{64}{3} - \pi$.

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Faça, em cada item, o que se pede:

a) calcule $f'(0)$, onde $f(x) = \text{sen}(\pi\, \ell n(2x + 1))$.

b) calcule $g'(x)$, onde $g(x) = \int_0^x \text{arc tg}(\text{sen}(3e^t))dt$.

c) determine o ponto de máximo da função $h(x) = x^4 - 2x^2$ no intervalo $(-1,1)$.

Cálculos e respostas:

a)

Pela regra da cadeia, temos:

$$f'(x) = \cos(\pi\, \ell n(2x + 1))\, (\pi\, \ell n(2x + 1))'$$

$$= \cos(\pi\, \ell n(2x + 1))\, \pi\, \frac{2}{2x + 1}$$

$$= \frac{2\pi}{2x + 1} \cos(\pi\, \ell n(2x + 1))$$

Substituindo no ponto dado, temos

$$f'(0) = \frac{2\text{ð}}{1}\cos(\pi\, \ell n\, 1) = 2\pi\cos(\pi\, .\, 0) = 2\pi\cos 0 = 2\pi.$$

b)

A função $\text{arc tg}(\text{sen}(3e^t))$ é contínua no intervalo com extremos 0 e x, para todo $x \in$ □ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$g'(x) = \text{arc tg}(\text{sen}(3e^x)).$$

c)

Os pontos críticos de h são dados por $h'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$, $x \in (-1, 1)$. Logo, $x = 0$ é o único ponto crítico.

Fazendo a tabela de estudo de sinal de h', junto com o comportamento de h, obtemos:

	$x \in (-1, 0)$	$x = 0$	$x \in (0, 1)$
x	–	0	+
$x^2 - 1$	–	– 1	–
$h'=4x(x^2 - 1)$	+	0	–
$h(x) = x^4 - 2x^2$	cresce	0	decresce

Portanto, h assume em $x = 0$ o valor máximo $h(0) = 0$ no intervalo $(-1, 1)$.

5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Determine uma base e a dimensão do subespaço W do $\mathbb{R}^3$ dado por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \ \text{ e } \ x + 2y + z = 0\}.$$

Cálculos e respostas:

Resolvemos o sistema de duas equações lineares a três incógnitas:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z - z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -2z \end{cases}$$

Portanto,

$$v \in W \Leftrightarrow v = (3z, -2z, z) = z(3, -2, 1), \text{ com } z \in \mathbb{R},$$

mostrando que $(3, -2, 1)$ gera W.

Como $\{(3, -2, 1)\}$ é linearmente independente, temos que $\{(3, -2, 1)\}$ é uma base de W e a dimensão de W é 1.

6ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que:

T(1, 1, 0) = (1, 1, 2)

T(1, -1, 0) = (1, 0, 1)

T(0, 0, 1) = (2, 1, 0).

Cálculos e respostas:

Primeiramente, escrevemos (x, y, z) como combinação linear de (1,1,0), (1, –1,0), (0,0,1).

$$(x, y, z) = a(1,1,0) + b(1, -1,0) + c(0,0,1)$$
$$= (a + b, a - b, c)$$

Logo,

$$\begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \\ c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ 2a = x + y \\ c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = x - \dfrac{x+y}{2} \\ a = \dfrac{x+y}{2} \\ c = z \end{cases}$$

Portanto,

$$(x,y,z) = \frac{x+y}{2}(1,1,0) + \frac{x-y}{2}(1,-1,0) + z(0,0,1)$$

$$T(x,y,z) = \frac{x+y}{2}T(1,1,0) + \frac{x-y}{2}T(1,-1,0) + zT(0,0,1)$$

$$= \frac{x+y}{2}(1,1,2) + \frac{x-y}{2}(1,0,1) + z(2,1,0)$$

$$= \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} + 2z, \frac{x+y}{2} + z, x + y + \frac{x-y}{2}\right)$$

$$= \left(x + 2z, \frac{x+y+2z}{2}, \frac{3x+y}{2}\right)$$

Espaço reservado para rascunho

PROAC / COSEAC - Gabarito

Espaço reservado para rascunho