PROAC / COSEAC - Gabarito
Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$

Determine:

a) o domínio de f;

b) as equações das assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f, caso existam;

c) os intervalos de crescimento e decrescimento do gráfico de f;

Cálculos e respostas:

a) Como, para todo $x \in \mathbb{R}$ $e^{x^2/2}$ é um número real, a fração $\dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$ não está definida em $\mathbb{R}$ se x = 0. Assim, Dom f = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ ou Dom f = $\mathbb{R}^*$

b) Se houver assíntota horizontal, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ e/ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -k$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = 0$$

Logo, y = 0 é assíntota horizontal.

Se houver assíntota vertical, a candidata é a reta x = 0 pois $x = 0 \notin D$ f e $\lim_{x\to0^-} f(x) = \pm\infty$ e/ou $\lim_{x\to0^+} f(x) = \pm\infty$.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = +\infty$$

Logo, x = 0 é assíntota vertical

c) f é crescente quando f' (x) > 0 e f é decrescente quando f' (x) < 0

$$f'(x) = \frac{-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} e^{-x^2/2}.x - e^{-x^2/2}}{x^2} = \frac{-e^{-x^2/2}(x^2+1)}{x^2}$$

$x^2 + 1 > 0\ \forall \quad x^2 > 0\ \forall x$, $e^{-x2/2} > 0\ \forall$ x . Então f' (x) < 0 para todo $x \in$ D f.

Logo f é decrescente para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Calcule a área da região do plano definida pelas curvas:

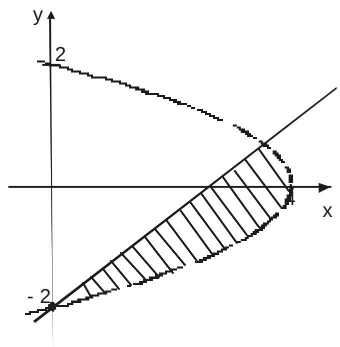
$$x + y^2 - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x - y - 2 = 0.$$

Cálculos e respostas:

→ $x + y^2 - 4 = 0$ é a equação de uma parábola, cujo vértice está em (4,0) e corta o eixo y em (0, -2) e (0, 2)

→ $x - y - 2 = 0$ é a equação de uma reta que passa pelo ponto (0, -2) e (3,1). Assim, a região definida pelas curvas está representadas no gráfico.

$$A = \int_{-2}^{1} \int_{y+2}^{4-y^2} dxdy = \int_{-2}^{1} \left(4 - y^2 - y - 2\right) dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$



$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = \frac{9}{2} \text{ u.a}$$

3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

$$\text{Sendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ calcule:}$$

a) A^{-1}, caso exista;

b) os auto valores de A.

Cálculos e respostas:

det A = –2 + 1 = –1. Existe A^{-1}.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \times (-1) + L_3 \longrightarrow L_3$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$L_2 \times (-2) + L_1 \longrightarrow L_1$

$L_2 \times (-1) \longrightarrow L_2$

$L_2 \times 1 + L_3 \longrightarrow L_3$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right. \rightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right.$$

$L_3 \times (-1) + L_1 \longrightarrow L_1$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{b) det} \begin{pmatrix} 1-l & 2 & 1 \\ 0 & -1-l & 0 \\ -1 & 1 & 2-l \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda) + (1+\lambda) = 0$$

$(1 + \lambda)(1 + (1 - \lambda)(\lambda - 2)) = 0$

$\lambda_1 = -1$

$$l_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

1 $3\lambda - \lambda^2 - 2 = 0$ ou $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

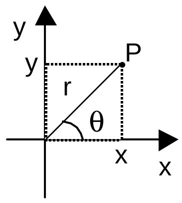
são os auto valores de A.

4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Sendo $r = 4\sec\theta$ a equação de uma curva em coordenadas polares, determine sua equação em coordenadas cartesianas e identifique-a.

Cálculos e respostas:

$r = 4 \sec \theta$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

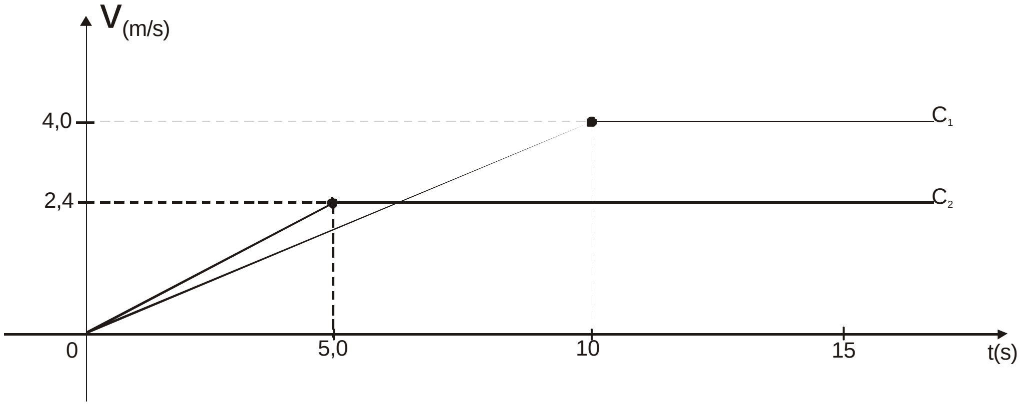
$\sec\theta = \frac{r}{x}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4.\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \Rightarrow x = 4$$

Representa uma reta vertical.

5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

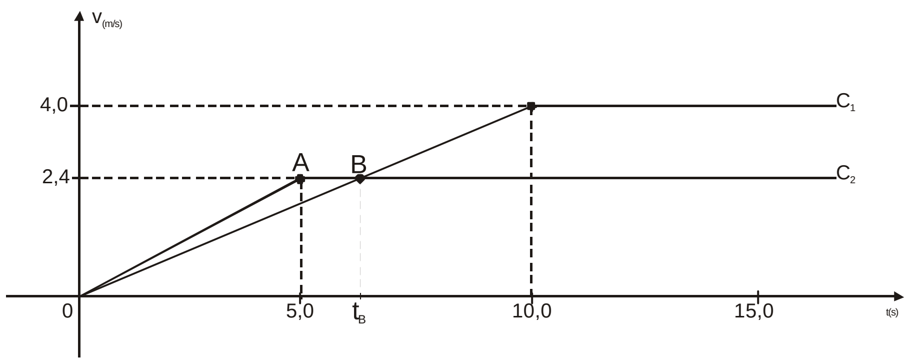
A figura a seguir mostra o gráfico da velocidade de dois ciclistas C_1 e C_2 em função do tempo. Ambos partem da origem das posições no instante t = 0 e descrevem a mesma trajetória.



Calcule:

a) O instante em que os dois ciclistas têm a mesma velocidade.
b) A distância entre eles no instante considerado no item a).

Cálculos e respostas:



a) A aceleração do ciclista C_1 entre 0 e 10 s é:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4}{10} = 0{,}4\,m/s^2$$

Os dois ciclistas têm a mesma velocidade no ponto B, no instante t_B.

Para o ciclista C_1, no ponto B: $v = a \cdot t_B$

$$2{,}4 = 0{,}4\ t_B$$

$$t_B = 6{,}0\ s$$

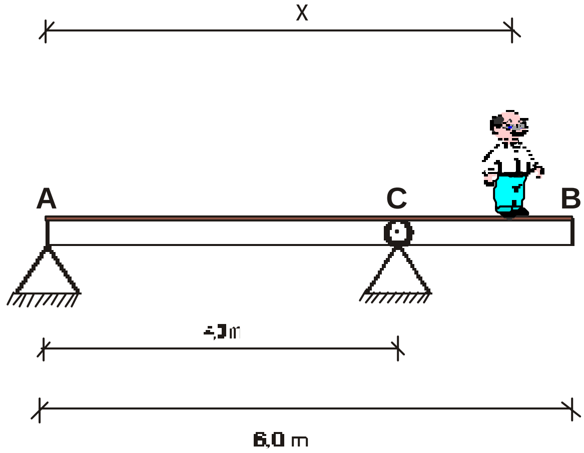
b) A distância pode ser calculada pela área do triângulo OAB: d_{12}

$$d_{12} = \frac{(6-5)\,x\,2{,}4}{2} = d_{12} = 1{,}2m$$

$6^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (1,0 ponto)

Um homem de massa igual a 60 kg anda sobre uma barra rígida de madeira, simplesmente apoiada em A e articulada em C. A massa da barra é de 90 kg e seu comprimento é de 6,0 m. A posição x, na figura, indica a distância máxima, a partir do ponto A, que o homem pode caminhar sobre a barra para que ela permaneça em equilíbrio.

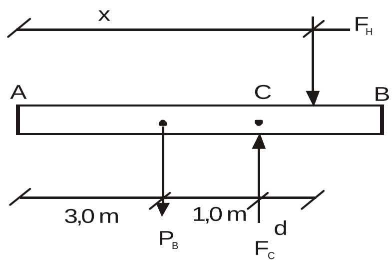
Considere g = 10 m/s^2.



a) Faça um desenho indicando a direção e o sentido das forças exercidas sobre a barra quando o homem se encontra na posição x. Identifique o agente que exerce cada uma delas.
b) Calcule o valor de x.

Cálculos e respostas:

a)



$\vec{F}_H$: força exercida pelo homem

$\vec{F}_C$: força exercida pela articulação C.

$\vec{P}_B$: peso da barra – ação gravitacional exercida pela Terra

b) $\sum_{MC} = 0$

$P_B = 90 \times 10 = 900$ N

$F_H = P_{homem} = 60 \times 10 = 600$ N

$900 \times 1 - 600 \times d = 0$

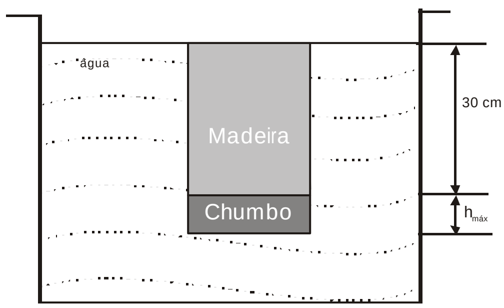
$600d = 900 \;\therefore\; d = 1{,}5$ m

$x = 4 + 1{,}5 \;\therefore\; x = 5{,}5$ m

7^{a} QUESTÃO: (1,0 ponto)

Determine a altura máxima que o lastro de chumbo (cilíndrico) pode ter, de modo a permitir que o corpo, também cilíndrico e de madeira, ainda permaneça flutuando na água, sem afundar, como mostra a figura.

Dados: densidade do chumbo: 11,3
densidade da madeira: 0,20
densidade da água: 1,0



Cálculos e respostas:

Em equilíbrio: P = E

$P_m + P_{ch} = E$

$\mu_m \cdot V_m \cancel{g} + \mu_{ch} \cdot V_{ch} \cdot \cancel{g} = \mu_{água} \cdot V_s \cancel{g}$

Sendo V = S . h

$\mu_m \cdot \cancel{S} \cdot h_m + \mu_{ch} \cancel{S} \cdot h_{ch} = \mu_{água} \cancel{S} \cdot h_s$

$$h_s = \frac{m_m}{m_{agua}} \cdot h_m + \frac{m_{ch}}{m_{agua}} \cdot h_{ch}$$

$h_s = d_m \cdot h_m + d_{ch} \cdot h_{ch}$

no caso $h_s = 30 + h_{máx}$

$30 + h_{máx} = 0{,}20 \times 30 + 11{,}3 \times h_{máx}$

$24 = 10{,}3\ h_{máx}$

$h_{máx} = 2{,}3$ cm

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Os carrinhos A e B, de massas $m_A = 0{,}20$ kg e $m_B = 0{,}40$ kg, movem-se juntos, sobre uma superfície horizontal lisa. Entre eles existe uma mola, cuja massa é bem menor que a dos carrinhos. A mola é mantida comprimida por um fio, como indica a figura (1).

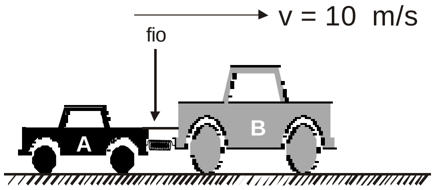


figura (1)

No instante em que a velocidade dos carrinhos é de 10 m/s, o fio arrebenta e os carrinhos se separam. Verifica-se, então, que o carrinho B passa a se mover com uma velocidade v_B igual a 14 m/s, como mostra a figura (2).

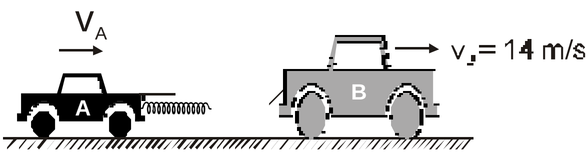


figura (2)

a) Calcule a velocidade v_A a partir da qual o carrinho A passa a se mover
b) Chamando as energias cinéticas dos carrinhos, respectivamente, antes e depois da "explosão" da mola de E_{ci} e E_{cf}, diga se $E_{ci} < E_{cf}$, $E_{ci} = E_{cf}$ ou $E_{ci} > E_{cf}$. Justifique sua resposta.

Cálculos e respostas:

a) Pela conservação do momento linear:

$(m_A + m_B)\, v = m_A \,.\, v_A + m_B \,.\, v_B$

$(0{,}2 + 0{,}4)\, 10 = 0{,}2\, v_A + 0{,}4 \times 14$

$0{,}2\, v_A = 0{,}4$

$v_A = 2{,}0$ m/s

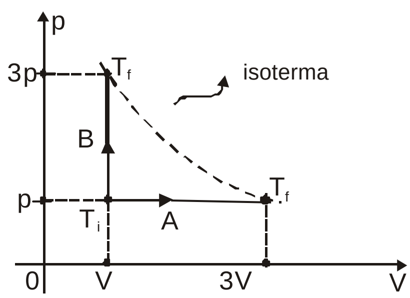
b) $E_{ci} < E_{cf}$, pois a energia cinética dos carrinhos aumenta devido à transformação da energia potencial, contida na mola, quando comprimida.

$$E_{ci} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}6 \times 10^2 = 30 \text{ J}$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}2 \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 0{,}4 \times 14^2 = 39{,}6 \text{ J}$$

9ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

O gráfico a seguir representa dois processos para levar uma determinada massa de um gás ideal de uma temperatura inicial T_i até uma temperatura final T_f. O primeiro (A) representa uma evolução isobárica e o segundo (B) uma evolução isométrica. O trabalho realizado num dos processos foi igual a 83 J.



a) Identifique em qual dos dois processos, A ou B, foi necessário ceder MAIOR quantidade de calor à massa do gás. Justifique sua resposta.
b) Determine a quantidade de calor cedida a mais entre os dois processos.

Cálculos e respostas:

a) Pela 1ª lei da Termodinâmica

$Q - W = \Delta U \quad \therefore \quad Q = \Delta U + W$

Em ambos os processos, a variação de temperatura foi a mesma, $T_f - T_i$. Logo $(\Delta U)_A = (\Delta U)_B = \Delta U$.

No processo B: V constante; logo $W_B = 0$

$Q_B = \Delta U$ (1)

No processo A: p cte; logo $W_A \neq 0$; $\Delta V > 0 \longrightarrow W_A > 0$

$Q_A = \Delta U + W_A$ (2)

Comparando-se (1) e (2), conclui-se que $Q_A > Q_B$

No processo A

b) $Q_A - Q_B = \cancel{\Delta U} + W_A - \cancel{\Delta U}$

Como $W_B = 0$, o valor dado, 83 J, corresponde a W_A.

Logo: $\boxed{Q_A - Q_B = 83 \text{ J}}$