

PROAC / COSEAC - Gabarito
Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (1,5 ponto)



Considere a função f definida por $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{x}$

Determine:

- a) o domínio de f ;
- b) as equações das assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f , caso existam;
- c) os intervalos de crescimento e decrescimento do gráfico de f ;

Cálculos e respostas:

a) Como, para todo $x \in \mathbb{R}$ $e^{x^2/2}$ é um número real, a fração $\frac{e^{-x^2/2}}{x}$ não está definida em $\mathbb{R}$ se $x = 0$. Assim, $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ ou $\text{Dom } f = \mathbb{R}^*$

b) Se houver assíntota horizontal, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ e/ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = 0$$

Logo, $y = 0$ é assíntota horizontal.

Se houver assíntota vertical, a candidata é a reta $x = 0$ pois $x = 0 \notin D f$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \pm\infty$ e/ou

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pm\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = +\infty$$

Logo, $x = 0$ é assíntota vertical

c) f é crescente quando $f'(x) > 0$ e f é decrescente quando $f'(x) < 0$

$$f'(x) = \frac{-\frac{2x}{2}e^{-x^2/2} \cdot x - e^{-x^2/2}}{x^2} = \frac{-e^{-x^2/2}(x^2 + 1)}{x^2}$$

$x^2 + 1 > 0 \forall x^2 > 0 \forall x$, $e^{-x^2/2} > 0 \forall x$. Então $f'(x) < 0$ para todo $x \in D f$.

Logo f é decrescente para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2ª QUESTÃO: (1,5 ponto)



Calcule a área da região do plano definida pelas curvas:

$$x + y^2 - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x - y - 2 = 0.$$

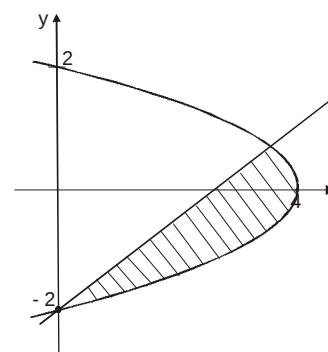
Cálculos e respostas:

→ $x + y^2 - 4 = 0$ é a equação de uma parábola, cujo vértice está em (4,0) e corta o eixo y em (0, -2) e (0, 2)

→ $x - y - 2 = 0$ é a equação de uma reta que passa pelo ponto (0, -2) e (3,1). Assim, a região definida pelas curvas está representadas no gráfico.

$$A = \int_{-2}^1 \int_{y+2}^{4-y^2} dx dy = \int_{-2}^1 (4 - y^2 - y - 2) dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right)_{-2}^1 =$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = \frac{9}{2} \text{ u.a}$$



3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Calcule o gradiente de $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$ no ponto $(2, -1, 5)$.

Cálculos e respostas:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{z}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$$

$$f_x(2, -1, 5) = -\frac{1}{5}; \quad f_y(2, -1, 5) = \frac{2}{5}; \quad f_z = -\frac{2 \cdot (-1)}{25} = \frac{2}{25}$$

$$\nabla f(2, -1, 5) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{25} \right)$$

4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Resolva:

$$x'' + 3x' + 2x = t + e^{-t}$$

Cálculos e respostas:

$$x'' + 3x' + 2x = t + e^{-t}$$

eq. carac: $r^2 + 3r + 2 = 0$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}$$

$$x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

$$x_p = At + B + Ct e^{-t}$$

$$x_p' = A + C e^{-t} - Ct e^{-t}$$

$$x_p'' = -2C e^{-t} + Ct e^{-t}$$

$$-2C e^{-t} + Ct e^{-t} + 3A + 3C e^{-t} - 3Ct e^{-t} + 2At + 2B + 2Ct e^{-t} = t + e^{-t}$$

$$-2C + 3C = 1 \longrightarrow C = 1$$

$$3A + 2B = 0 \longrightarrow 2B = \frac{-3}{2} \therefore B = \frac{-3}{4}$$

$$2A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x_p = \frac{t}{2} - \frac{3}{4} + te^{-t}$$

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4} + te^{-t}$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

5ª QUESTÃO: (1,5 ponto)



Uma solução de uma substância orgânica contendo 42 g/litro exerce uma pressão osmótica de 5,55 atm na temperatura de 0°C.

Calcule o peso molecular da referida substância, utilizando a constante geral dos gases.

Dado:

$R = 0,082 \text{ litro} - \text{atm/gmol} \text{ } ^\circ\text{K}$

Cálculos e respostas:

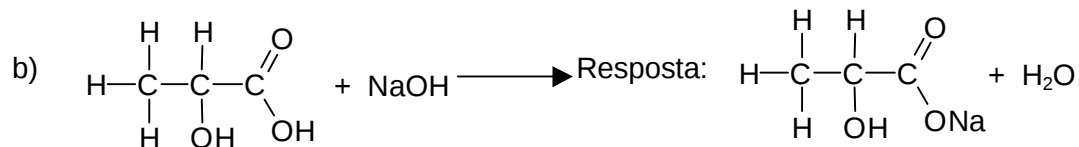
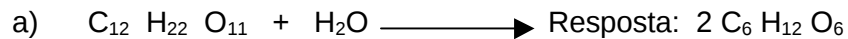
$$PV = n R T \Rightarrow PV = \frac{m}{\text{PesoMolecular}} R T \Rightarrow \text{Peso Molecular} = \frac{m}{PV} R T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Peso Molecular} = \frac{42}{5,55 \times 1} \times 0,082 \times 273 \cong 169$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

6ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Complete as reações abaixo:



7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

O nitrogênio forma com o oxigênio um óxido contendo 53% de oxigênio.
Informe a possibilidade de existência de outro óxido contendo 69% de oxigênio.
Justifique.

Cálculos e respostas:

Sim. Os óxidos são compostos binários.

$$1^{\circ} \text{ óxido} \quad \% \text{ N} = 100 - 53 = 47\%$$

$$2^{\circ} \text{ óxido} \quad \% \text{ N} = 100 - 69 = 31\%$$

$$1^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \text{N} = 47\% \\ \text{O} = 53\% \end{array} \right.$$

$$2^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \text{N} = 31\% \\ \text{O} = 69\% \end{array} \right.$$

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

--	--

Calcule a molaridade de uma solução de K_2CO_3 3 N.

Cálculos e respostas:

1 molar ——— 2 normal

x molar ——— 3 normal

x = 1,5 molar