

PROAC / COSEAC - Gabarito
Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (3,0 pontos)



Considere a função $f(x) = x\sqrt{3-x}$. Determine:

- (i) o domínio de f e as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados;
- (ii) as assíntotas horizontais e verticais ao gráfico de f , caso existam;
- (iii) os intervalos onde f é crescente e os intervalos onde f é decrescente, caso existam;
- (iv) os extremos relativos de f , caso existam;
- (v) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para cima e os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade para baixo, caso existam;
- (vi) os pontos de inflexão do gráfico de f , caso existam;
- (vii) os pontos de máximo e de mínimo absoluto, caso existam.

Finalmente, esboce o gráfico de f e determine sua imagem.

Cálculos e respostas:

i) $3 - x \geq 0 \Rightarrow \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R}; 3 - x \geq 0\}$

$$= (-\infty, 3]$$

Interseção com o eixo Ox $\rightarrow y = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{3-x} = 0$

$x = 0$
 $\swarrow$
 $x = 3$

ou

Interseção com o eixo Oy $\rightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

ii) Assíntotas verticais

Como para $a \in \text{Dom } f$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, o gráfico de f não possui assíntotas verticais

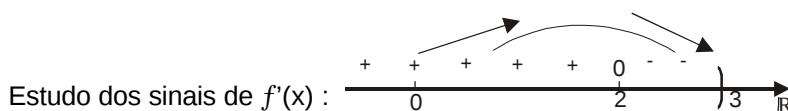
Assíntotas horizontais

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, f não possui assíntota horizontal.

iii) A função f é derivável em todo $x \in \text{Dom } f$,

$$f'(x) = \sqrt{3-x} + x \frac{1}{2} \frac{(-1)}{\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

e, portanto, $f'(x) = 0$ sse $x = 2$.



f é crescente em $(-\infty, 2)$

f é decrescente em $(2,3)$

PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

iv) Pelo item (iii) o ponto crítico de f é $x = 2$.

De posse do estudo dos sinais de $f'(x)$ temos, pelo teste da derivada primeira, que f possui um máximo local em $x = 2$.

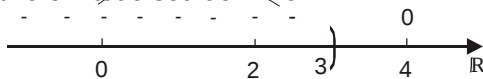
v) Como f' é derivável para todo $x \in \text{Dom } f$,

$$f''(x) = \frac{-3.2\sqrt{3-x} - (6-3x) \cdot \frac{1}{2} \frac{2(-1)}{\sqrt{3-x}}}{4(3-x)} = \frac{-6(3-x) + 6-3x}{4(3-x)^{3/2}} = \frac{-12+3x}{4(3-x)^{3/2}}$$

Sendo o denominador $4(\sqrt{3-x})^3 > 0$ para todo $x \in \text{Dom } f$, o sinal de f'' fica determinado pelo

sinal do numerador. Como $-12 + 3x < 0$ para $x \in (-\infty, 3) = \text{Dom } f$, concluímos que o gráfico de

f tem concavidade para baixo em todo seu domínio.



Estudo dos sinais de $f''(x)$:

$$f''(2) = \frac{-12+3.2}{4(3-2)^{3/2}} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Como $f'(2) = 0$, $f''(2) < 0$, segue do teste da derivada segunda que f

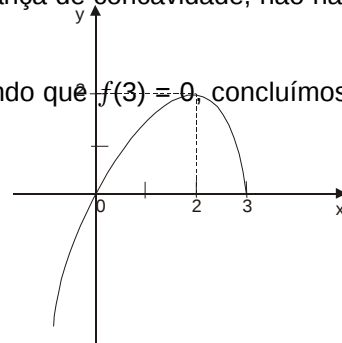
possui um máximo local em $x = 2$.

vi) Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, não existe $x \in \text{Dom } f$ tal que em $(x, f(x))$ haja mudança de concavidade, não há pontos de inflexão.

vii) Como $f(3) = 0$, f não possui mínimo global. Sabendo que $f(3) = 0$, concluímos com o item

(iv) que f possui máximo global em $x = 2$ ($f(2)=2$)

Esboço do gráfico de f



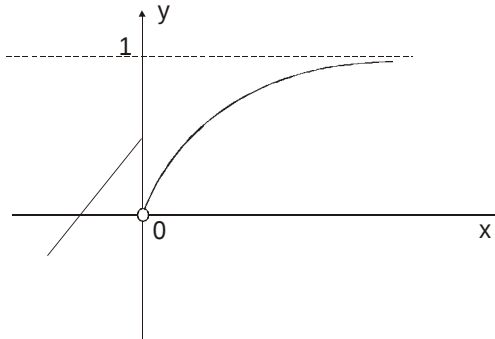
PROAC / COSEAC - Gabarito

$$\text{Im } f = (-\infty, 2]$$

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

--	--

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função cujo gráfico está na figura abaixo.



Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Cálculos e respostas:

Seja $y = \frac{1}{x}$. Assim quando $x \rightarrow 0^+$, $y \rightarrow +\infty$.
quando $x \rightarrow 0^-$, $y \rightarrow -\infty$.

Daí,

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 1$

e

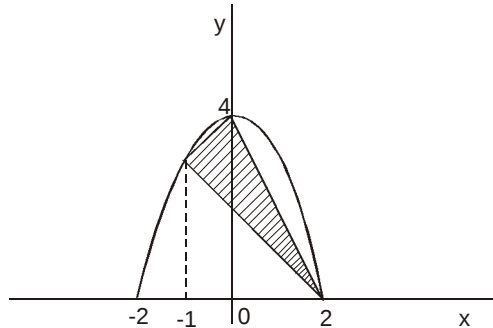
b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = -\infty$

Finalmente de a) e b) concluímos que (c) $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$

3ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

--	--

Seja S a região hachurada limitada pelas curvas $y = 4 - x^2$, $y = -2x + 4$ e $y = -x + 2$, conforme a figura abaixo:



Determine o valor da área de S.

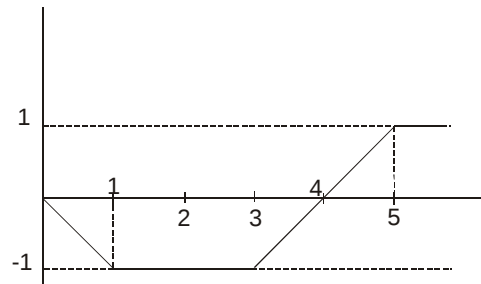
Cálculos e respostas:

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \int_{-1}^0 \left[(4 - x^2) - (-x + 2) \right] dx + \int_0^2 \left[(-2x + 4) - (-x + 2) \right] dx \\
 &= \int_{-1}^0 (2 - x^2 + x) dx + \int_0^2 (-x + 2) dx = \\
 &= \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^2 = \\
 &= \left(0 - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \right) + (-2 + 4 - 0) = 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{24 - 2 - 3}{6} = \\
 &= \frac{24 - 5}{6} = \frac{19}{6} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

4ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

--	--

O gráfico da derivada $f'(x)$ é dado abaixo.



Sabendo que $f(0) = 2$, determine:

- a) $f(1)$
- b) $f(5)$

Cálculos e respostas:

$$a) \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) \Rightarrow f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(x) dx$$

$$\Rightarrow f(1) = 2 - A(\triangle) = 2 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$$

b) De modo análogo,

$$f(5) = f(0) + \int_0^5 f'(x) dx = f(0) + (-A(\triangle) + A(\triangle))$$

$$= 2 + \left[-\left(\frac{2+4}{2} \cdot 1 \right) + \frac{1 \cdot 1}{2} \right] = 2 + \left[-3 + \frac{1}{2} \right] = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

--	--

Seja $\alpha = \{(1,1,1), (0,1, -1), (-2,1,1)\}$

- a) Mostre que α é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$.
b) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear, tal que:
1) $T(v) = v$, para todo $v = (x, y, z)$ com $x + y + z = 0$;
2) $T(v) = -v$, para todo v do subespaço gerado por $(1,1,1)$.

Determine $T(x,y,z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Cálculos e respostas:

- a) Sejam $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (-2,1,1)$. Temos:

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2 \rangle &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 + 1 - 1 = 0 \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -2 + 1 + 1 = 0 \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 + 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

Portanto, os três vetores são ortogonais.

Como vetores não-nulos ortogonais são linearmente independentes e a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3, então α é uma base do $\mathbb{R}^3$.

- b) A condição (1) significa que o plano $x + y + z = 0$ fica fixo pela transformação linear T .

Os vetores v_2 e v_3 estão no plano, pois $0 - 1 + 1 = 0$ e $-2 + 1 + 1 = 0$. Assim, $T(v_2) = v_2$ e $T(v_3) = v_3$.

Da condição (2), temos que $T(v_1) = -v_1$

Portanto, conhecemos a transformação linear T na base α .

Para determinar $T(x, y, z)$ devemos escrever $v = (x, y, z)$ como combinação linear de α , a saber,

$$(x, y, z) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

Como a base α é ortogonal, temos que:

$$a_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{x + y + z}{3}$$

$$a_2 = \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = \frac{y - z}{2}$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

Logo,

$$T(x,y,z) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + a_3T(v_3)$$

$$= -a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

$$= -\frac{x+y+z}{3}(1,1,1) + \frac{y-z}{2}(0,1,-1) + \frac{-2x+y+z}{6}(-2,1,1)$$

$$= \left(\frac{2x-4y-4z}{6}, \frac{-4x+2y-4z}{6}, \frac{-4x-4y+2z}{6} \right)$$

$$= \left(\frac{x-2y-2z}{3}, \frac{-2x+y-2z}{3}, \frac{-2x-2y+z}{3} \right)$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

--