PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Considere a função f definida por $f(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{2}$.

Determine:

a) as equações das assíntotas horizontais e verticais, caso existam;

b) as coordenadas dos pontos de máximo e mínimo locais, caso existam;

c) as coordenadas dos pontos de inflexão, caso existam;

d) um esboço do gráfico de f, considerando os elementos obtidos nos itens **a**, **b**, e **c**.

Cálculos e respostas:

$$y=\frac{e^{-x^2}}{2}$$

a) assíntotas verticais $\rightarrow$ não há, pois o domínio da função é □ .

assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{2}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x^2}}{2}\quad \text{(a função é par)}$$

y = 0 é assíntota horizontal

b) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2}\Rightarrow y'=-xe^{-x^2}\quad\Rightarrow\quad y'=0\quad se\quad x=0$

$$se\quad x<0\Rightarrow y'>0\Rightarrow y\ crescente$$

$$se\quad x>0\Rightarrow y'<0\Rightarrow y\ decrescente$$

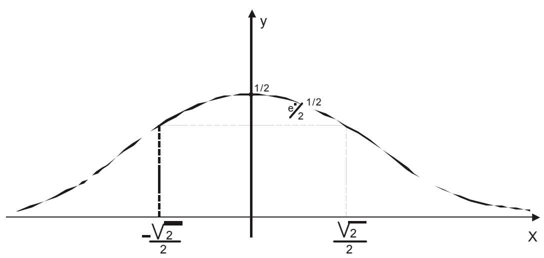
(0, 1) é ponto de máximo local; não tem ponto de mínimo local.

c) $y''=-e^{-x^2}+x\ .\ 2xe^{-x^2}=(-1+2x^2)e^{-x^2}$

$$y''=0\ \rightarrow\ 2x^2=1\quad\therefore\quad x^2=\frac{1}{2}\quad\therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$ são as coord. dos pontos de inflexão

d)



2ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Calcule $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Cálculos e respostas:

$$\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{4\text{sen}^2\theta\ .2\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{4-4\text{sen}^2\theta}} =$$

x = 2 sen θ

dx = 2 cos θ d θ

x = 0 → θ = 0

x = 2 → θ = $\frac{\pi}{2}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\ sen^2\theta\ \cos\theta\ d\theta}{\cancel{2}\sqrt{1-sen^2\theta}} =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} sen^2\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2\theta)\, d\theta =$$

$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$

$\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta$

$2\ \text{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$$= 2\left(\theta - \frac{sen 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Mostre que a função $z = \ell n(x^2 + y^2)$ satisfaz à equação de Laplace: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Cálculos e respostas:

$z = \ell n(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x.2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y.2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Determine:

a) A^T;
b) det A;
c) A^{-1}, caso exista.

Cálculos e respostas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) det A = 2 . 1 . 3 + (–1) . 1 . 5 = 6 – 5 = 1.

c) Como det A $\neq$ 0 existe A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

i) $L_1 \div 2 \rightarrow L_1$; $L_1 \times \dfrac{(-5)}{2} + L_2 \rightarrow L_2$

ii) $L_2 \times (-1) + L_3 \rightarrow L_3$

iii) $L_3 \times 2 \rightarrow L_3$;

$L_3 \times (-5) + L_2 \rightarrow L_2$

$L_3 + L_1 \rightarrow L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5/2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Logo: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

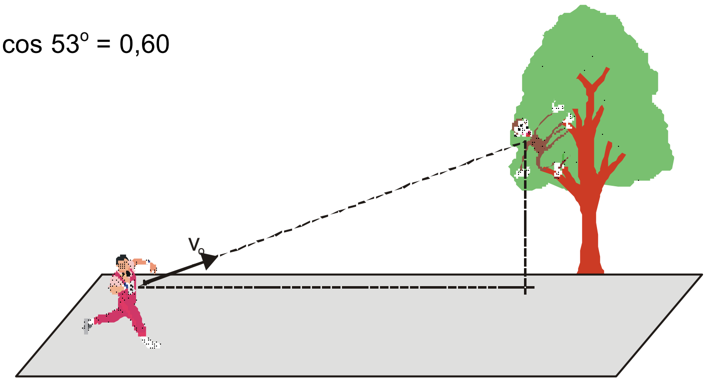
5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Um garoto, com uma pedra, quer atingir o macaco que está pendurado no galho de uma árvore. A distância horizontal entre o garoto e o macaco é de 6,0 m. O garoto lança a pedra apontando diretamente para o animal, com uma velocidade inicial de 10 m/s fazendo um ângulo de 53° com a horizontal. No instante em que a pedra é lançada, o macaco larga o galho, caindo verticalmente.

Considere desprezível a resistência do ar e $g = 10\ m/s^2$.

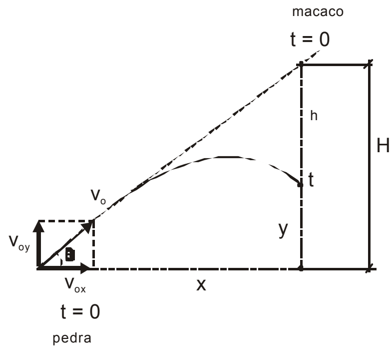
Dados:

sen 53° = 0,80; cos 53° = 0,60



Nesta situação, o macaco será atingido pela pedra? Em caso negativo, a pedra passará por cima ou por baixo do macaco? Justifique sua resposta por meio de cálculos.

Cálculos e respostas:



pedra: $x = v_{ox} \cdot t = v_o \cos\theta \cdot t \quad \therefore \quad t = \dfrac{6}{10x0,6} = 1s$

$y = v_{oy} \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \quad \therefore\ y = 8 \times 1 - \dfrac{1}{2} \times 10 \times 1 \quad \therefore\ y = 3\ m$

$v_{oy} = v_o \cdot sen\theta = 10 \times 0,8 = 8m/s$

macaco: $tg\theta = \dfrac{senq}{cosq} = \dfrac{0,8}{0,6} = \dfrac{4}{3} \qquad \dfrac{H}{x} = tgq \ \therefore\ H = 6x\dfrac{4}{3} = 8m$

$h = \dfrac{1}{2}gt^2 \quad \therefore \quad h = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 1 = 5\ m$

$H - h = 8 - 5 = 3\ m$

No instante t = 1 s, tanto a pedra quanto o macaco estão a 3m do solo. Portanto ele será atingido pela pedra neste instante.

6ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Um balde com água, preso a uma corda de peso desprezível, gira no sentido anti-horário numa circunferência vertical de raio **R.** A massa de água dentro do balde é **m** e a velocidade do conjunto no ponto mais alto da trajetória é **v**.

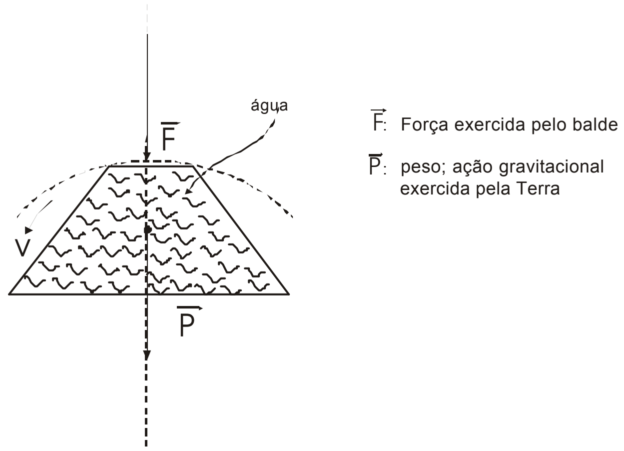
Considerando este ponto:

a) faça um desenho indicando a direção e sentido das forças exercidas sobre a água, identificando o agente que exerce cada uma delas;

b) determine o módulo da força exercida pelo balde sobre a água.

Cálculos e respostas:

a)



b) F + P = Fc

$$F + mg = m\frac{v^2}{R}$$

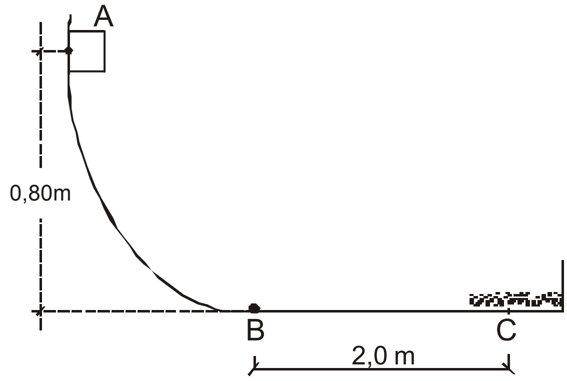
$$F = m\frac{v^2}{R} - mg \quad \therefore \quad F = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

A figura mostra um pequeno bloco de massa 0,50 kg abandonado, a partir do repouso, do ponto A de uma rampa. Embora no trecho AB da rampa o atrito seja desprezível, no trecho horizontal BC, deve ser considerado.

Ao entrar em contato com a mola ideal, de constante elástica igual a $1{,}5 \times 10^2$ N/m, o bloco provoca uma deformação máxima de 20 cm na mola, atingindo, então, o ponto C.

Dado: $g = 10\ m/s^2$



Pede-se:

a) a energia cinética do bloco ao atingir o ponto B pela primeira vez;
b) a energia dissipada por atrito no trecho BC;
c) verificar se, após atingir a mola pela primeira vez, o bloco, ao retornar, ultrapassa o ponto B.

Cálculos e respostas:

a) $E_{C_B} = E_{P_A} \therefore E_{C_B} = mgh_A = 0{,}5 \times 10 \times 0{,}8 = 4{,}0J$

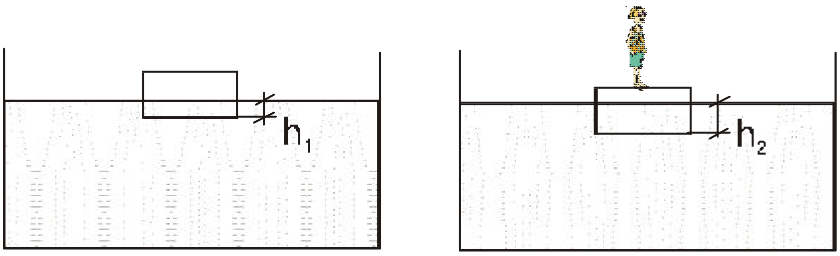
b) $E_{Dis} = E_{C_B} - E_{el_C} = 4 - \frac{1}{2} \times 1{,}5 \times 10^2 \times 4 \times 10^{-2} = 4 - 3 = 1{,}0\ J$

c) Ultrapassa, pois a energia do sistema massa-mola é 3,0 J (4 J – 1 J), maior do que a energia dissipada devido ao atrito no trecho CB(1,0 J)

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

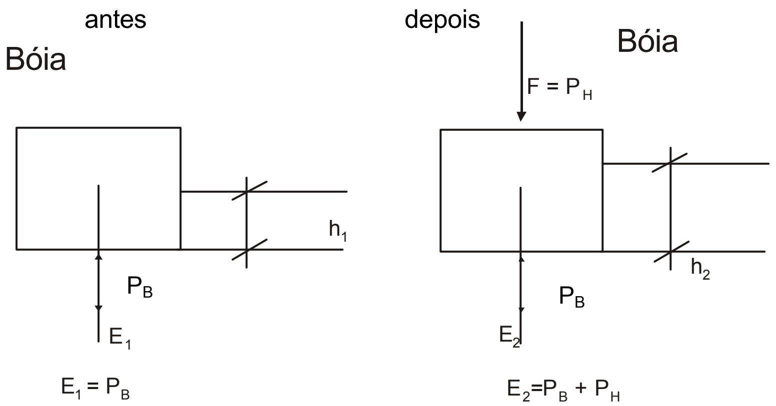
Uma bóia cilíndrica flutua numa piscina, mantendo suas bases paralelas à superfície da água. A área da seção reta da bóia é 0,50 m^2. Se um homem com massa de 90 kg ficar em pé sobre a bóia, quantos centímetros ela afundará?

Dados:
μágua = $1{,}0 \times 10^3$ kg/m^3
g = 10 m/s^2



antes   depois

Cálculos e respostas:



$E_2 = E_1 + P_H \quad \therefore \quad P_H = E_2 - E_1$

$$m_H . g = V_{s_2} \mu_l g - V_{s_1} \mu_l g$$

$$m_H \cancel{g} = (V_{s_2} - V_{s_1}) \mu_l \cancel{g}$$

$$m_H = S(h_2 - h_1).\mu_l$$

$$h_2 - h_1 = \frac{m_H}{S.\mu_l} \therefore h_2 - h_1 = \frac{90}{0{,}5 \times 10^3}$$

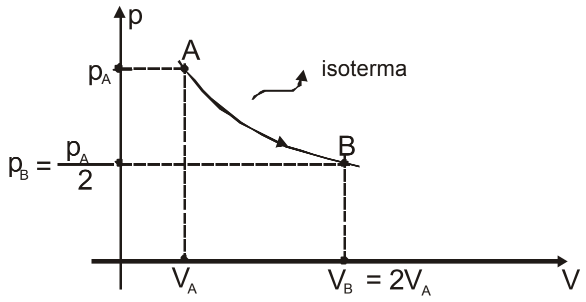
$$h_2 - h_1 = 180 \times 10^{-3} = 18 \times 10^{-2} m$$

A bóia afundará 18 cm

9ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Um mol de gás ideal, a 20,0 °C, sofre uma transformação isotérmica de $A \rightarrow B$, conforme mostra abaixo o diagrama pressão x volume.

Dados:
R = 8,31 J/mol.K
$\ell n\ 2 = 0,693$



Para esta transformação, calcule:

a) o trabalho realizado pelo gás;
b) a variação da energia interna do gás;
c) a quantidade de calor fornecida ao gás.

Cálculos e respostas:

a) $dW = p.dV \qquad p = \frac{nRT}{V}$

$$W = \int_{V_A}^{V_B} p.dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

$$W = n\,R\,T\ \ell n \frac{V_B}{V_A} \quad \therefore \quad W = 1 \times 8,31 \times 293 \times \ell n \frac{2\cancel{V_A}}{\cancel{V_A}}$$

$W = 8,31 \times 293 \times 0,693$

$W = 1,69 \times 10^3$ J

b) transformação isotérmica: T constante

$\Delta U = 0$

c) $Q - W = \Delta U$

$\Delta U = 0 \quad \therefore \quad Q = W \quad \therefore \quad Q = 1,69 \times 10^3$ J