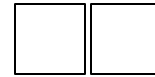


Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (1,5 ponto)



Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Determine:

- a) a transposta de A.
- b) a inversa de A.
- c) os autovalores de A, para $\theta = \frac{\pi}{4}$

Cálculos e respostas:

$$A = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$$

a)

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix};$$

$$b) A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof } A)^T$$

$$\det A = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \quad (\text{cof } A)^T = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix} = A^T$$

$$c) \theta = \pi/4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det (A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \right)^2 + 1 = \frac{1}{2} - \sqrt{2}\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + \frac{3}{2} = 0 \quad \lambda = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-6}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm 2i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i$$

2ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

--	--

Calcule $\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} dx$

Cálculos e respostas:

$$I = \int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$$

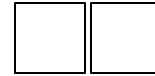
$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B=2 \\ 2A+B=3 \end{cases}$$

$$A = 1$$

$$B = 1$$

$$I = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = \ln(x-1) + \ln(x-2) + C$$

3ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Dada a função f definida por $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + \frac{xy}{z})$, determine seu vetor gradiente no ponto $(1, 2, -2)$.

Cálculos e respostas:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$f_x = \frac{2x + y/z}{x^2 + y^2 + xy/z} ; f_y = \frac{2y + x/z}{x^2 + y^2 + xy/z} ; f_z = \frac{-xy/z^2}{x^2 + y^2 + xy/z}$$

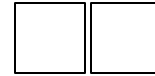
$$f_x(1, 2, -2) = \frac{2 - 1}{1 + 4 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$f_y(1, 2, -2) = \frac{4 - 1/2}{4} = \frac{7}{8}$$

$$f_z(1, 2, -2) = \frac{-1/2}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$\nabla f(1, 2, -2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{8} \right)$$

4ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Calcule $\int_R (x+y)dA$, sendo R a região do plano definida por
 $y \leq x, y \leq 2-x^2, y \geq 0$.

Cálculos e respostas:

$$I = \int_R (x+y)dA = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y}} (x+y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_y^{\sqrt{2-y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2-y}{2} + y\sqrt{2-y} - \frac{y^2}{2} - y^2 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[y\sqrt{2-y} + 1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} \right] dy$$

$$\int_0^1 y\sqrt{2-y} dy = -2 \int_{\sqrt{2}}^1 (2-u^2)u^2 du = -2 \int_{\sqrt{2}}^1 2u^2 - u^4 du$$

$$2-y=u^2 \longrightarrow y=0 \longrightarrow u=\sqrt{2}$$

$$y=2-u^2 \quad y=1 \longrightarrow u=1$$

$$dy = -2udu$$

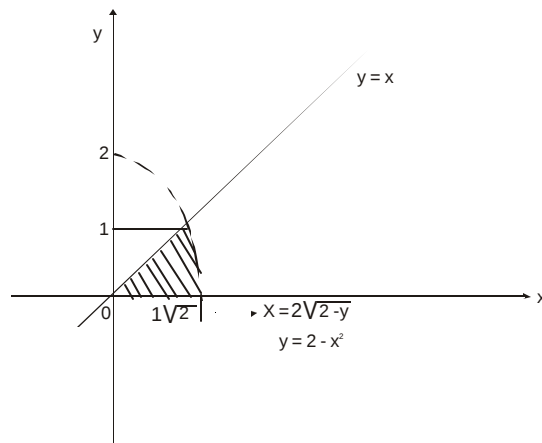
$$= -2 \left[\frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_{\sqrt{2}}^1$$

$$= -2 \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{5} \right]$$

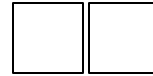
$$= -2 \left[\frac{17}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{15} \right]$$

$$= -2 \left[\frac{17}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right] + y \left(y - \frac{y^2}{4} \right) \Big|_0^1 - \frac{y^3}{2} \Big|_0^1 =$$

$$= -2 \left[\frac{7}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{15} \right] + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{41}{60}$$



5ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Um goleiro, num momento de desespero, bate um tiro de meta, chutando a bola com velocidade inicial de 72 km/h, fazendo um ângulo de 37° com a horizontal. A bola se desloca num plano vertical até atingir, novamente, um ponto do gramado.

Considere desprezível a resistência do ar e responda:

Dados:

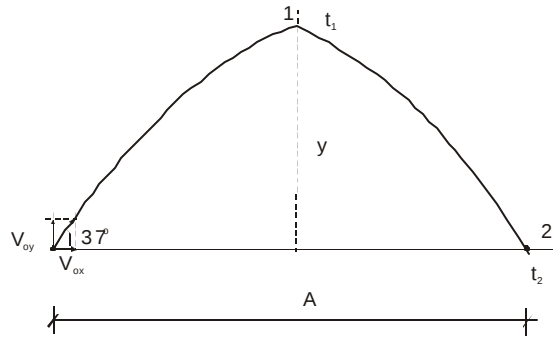
$$g = 10 \text{ m/s}^2.$$

$$\sin 37^\circ = 0,60$$

$$\cos 37^\circ = 0,80$$

- Em que instante a bola atinge o ponto mais alto de sua trajetória?
- Qual a altura máxima atingida pela bola?
- Quanto tempo a bola permanece no ar?
- Qual é o alcance horizontal da bola?

Cálculos e respostas:



a)

$$v_y = v_{oy} - gt$$

$$\text{no ponto 1: } v_y = 0; \quad t_1 = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{20 \times 0,6}{10} \quad \therefore \quad t_1 = 1,2 \text{ s}$$

b)

$$y = v_{oy} \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$y = 20 \times 0,6 \times 1,2 - \frac{1}{2} \times 10 \times 1,2^2 \quad \therefore \quad y = 7,2 \text{ m}$$

c)

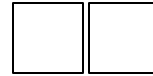
$$t_2 = 2t_1 \quad \therefore \quad t_2 = 2 \times 1,2 \quad \therefore \quad t_2 = 2,4 \text{ s}$$

d)

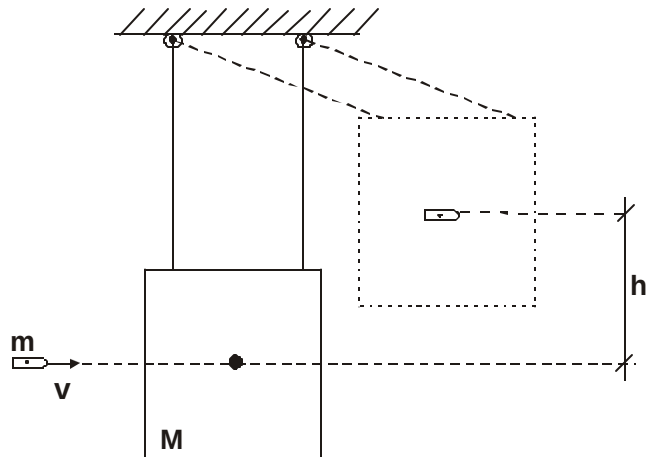
$$A = v_{ox} \cdot t_2 \quad \therefore \quad A = 2,0 \times 0,8 \times 2,4 = 3,84 \text{ m}$$

$$A = 3,84 \text{ m}$$

6ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Uma bala de revólver de massa m é atirada, horizontalmente, contra um saco de areia de massa M , suspenso, conforme mostra a figura.



A bala fica encravada no saco de areia e o sistema bala-saco se eleva de uma altura h . A aceleração da gravidade local é g .

Determine uma expressão para o cálculo da velocidade v da bala, em função de m , M , g e h .

Cálculos e respostas:

Pela conservação do momento linear:

$$m \cdot v + M \cdot 0 = (m + M) V$$

$$v = \frac{m + M}{m} \cdot V$$

pela conservação da energia

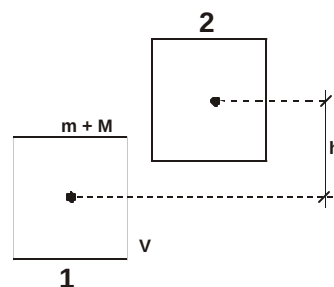
$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{P1} + E_{C1} = E_{P2} + E_{C2}$$

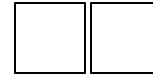
$$\frac{1}{2} (m + M) V^2 = (m + M) g \cdot h$$

$$V = \sqrt{2gh}$$

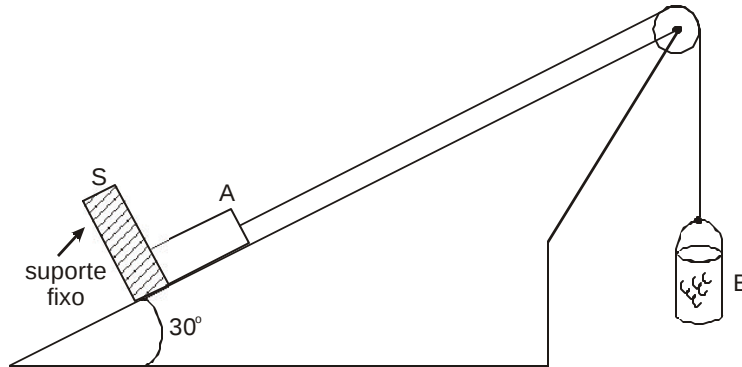
$$v = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{2gh}$$



7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

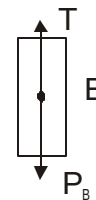
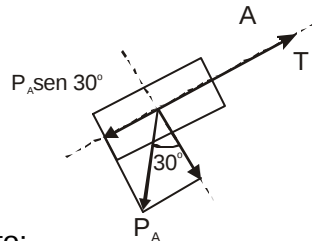


Um bloco A de massa 8,0 kg está apoiado num plano inclinado de 30° e contido por um suporte fixo S. Por meio de um fio ideal, o bloco A está ligado a um recipiente cilíndrico B de massa 0,40 kg, conforme mostra a figura.



Determine o número de bolinhas de aço, de 50g cada uma, que o recipiente B deve conter para que o movimento do bloco A se torne iminente. Considere todos os atritos desprezíveis.

Cálculos e respostas:



Na iminência de movimento:

$$T = P_A \sen 30^\circ$$

$$\text{Mas } T = P_B$$

$$\text{Logo: } P_B = P_A \sen 30^\circ$$

$$m_B \cdot g = m_A \cdot g \cdot \frac{1}{2} \quad \therefore \quad m_B = \frac{8}{2} \quad \therefore \quad m_B = 4,0 \text{ kg}$$

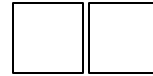
$$m_B = m_{\text{rec}} + m_{\text{bolinhas}}$$

$$m_{\text{bolinhas}} = 4 - 0,4 \quad \therefore \quad m_{\text{bolinhas}} = 3,6 \text{ kg} = 3,6 \times 10^3 \text{ g}$$

$$n^\circ \text{ de bolinhas} = \frac{m_{\text{bolinhas}}}{m_{1 \text{ bolinha}}} \quad \therefore \quad n^\circ \text{ de bolinhas} = \frac{3,6 \times 10^3}{50} = 72$$

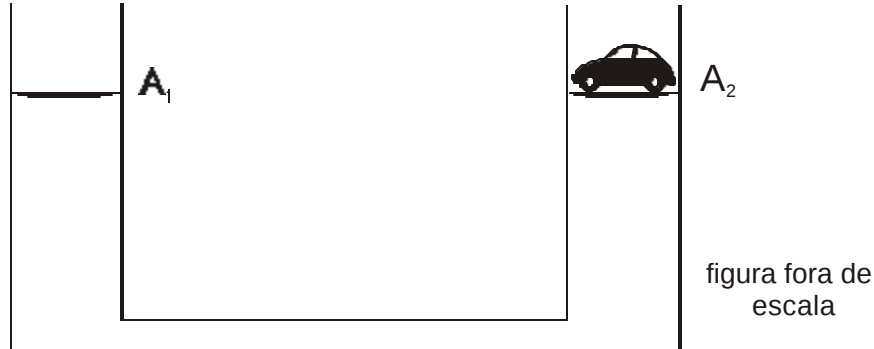
$$n^\circ \text{ de bolinhas} = 72$$

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Um elevador hidráulico de um posto de automóveis é acionado por meio de um êmbolo de área $A_1 = 3,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. O automóvel a ser elevado tem massa de $2,0 \times 10^3 \text{ kg}$ e está sobre o êmbolo de área $A_2 = 6,0 \times 10^{-1} \text{ m}^2$.

Para a solução da questão considere o modelo teórico da figura abaixo e $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Determine:

- A intensidade mínima da força que deve ser aplicada ao êmbolo de menor área para elevar o automóvel.
- O deslocamento que deve ter o êmbolo de menor área para elevar 30 cm o automóvel.

Cálculos e respostas:

a) $F_2 = P_{\text{automóvel}} = 2 \times 10^3 \times 10 = 2 \times 10^4 \text{ N}$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \therefore \quad \frac{F_1}{3 \times 10^{-3}} = \frac{2 \times 10^4}{6 \times 10^{-1}}$$

$$F_1 = 1,0 \times 10^2 \text{ N}$$

b) $V_1 = V_2$

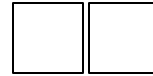
$$h_1 \cdot A_1 = h_2 \cdot A_2$$

$$h_1 \times 3 \times 10^{-3} = 30 \times 6 \times 10^{-1}$$

$$h_1 = 6 \times 10^3 \text{ cm}$$

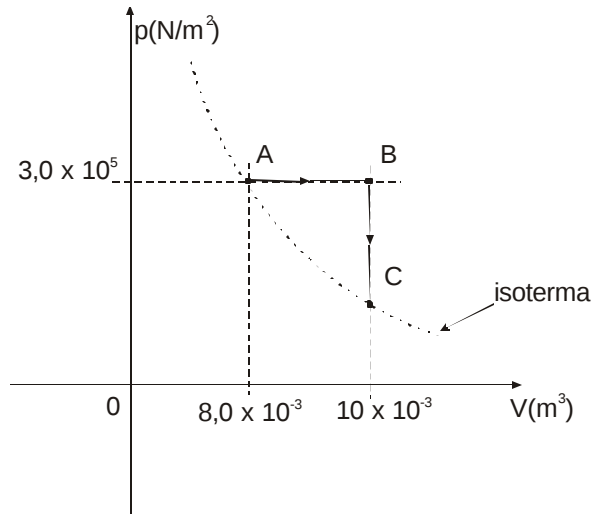
$$h_1 = 60 \text{ m}$$

9ª QUESTÃO: (1,0 ponto)



Um mol de gás ideal sofre uma transformação $A \rightarrow B \rightarrow C$ representada no gráfico pressão x volume da figura abaixo.

Dado: $R = 8,2 \text{ J/K.mol}$



Calcule:

- A temperatura do gás no estado C.
- O trabalho realizado pelo gás na transformação $A \rightarrow B \rightarrow C$.
- A variação da energia interna do gás entre os estados A e C.
- A quantidade de calor envolvida quando o gás passa do estado A para o estado C.

Cálculos e respostas:

a) $p_A \cdot V_A = n R T_A$

$$T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R} \quad \therefore \quad T_A = \frac{3 \times 10^5 \times 8 \times 10^{-3}}{1 \times 8,2} \quad \therefore \quad T_A = 293 \text{ K}$$

$$T_C = T_A = 293 \text{ K}$$

b) $W_{A \rightarrow B \rightarrow C} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C}$

$$W_{A \rightarrow B} = p \cdot \Delta V = 3 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3}$$

$$W_{A \rightarrow B} = 6,0 \times 10^2 \text{ J}$$

$$W_{B \rightarrow C} = 0$$

$$W_{A \rightarrow B \rightarrow C} = 6,0 \times 10^2 \text{ J}$$

Cálculos e respostas:

$$c) T_A = T_C \quad \therefore \quad U_A = U_C \quad \therefore \quad \Delta U = 0$$

$$e) W = Q + \Delta U$$

$$\Delta U = 0 \quad \therefore \quad W = Q \quad \therefore \quad Q = 6,0 \times 10^2 \text{ J}$$