1ª Questão: (10,0 pontos)

Suponha que, em certo dia de janeiro de 2002, quando 1 dólar americano valia 1 peso argentino e ambos valiam 2,31 reais, o governo argentino tenha desvalorizado sua moeda fazendo com que 1 dólar americano passasse a valer 1,40 peso argentino.

Considere que, no dia em que tal fato ocorreu, o real tenha permanecido inalterado em relação à moeda norte-americana.

Tomando como referência esse dia e a mencionada desvalorização, responda:

a) Quanto passou a valer, em real, 1 peso argentino?

b) Nesse momento, houve valorização ou desvalorização do real em relação ao peso argentino? Justifique sua resposta.

Cálculos e respostas:

Antes da desvalorização do peso (peso argentino):

1 dólar ——— 1 peso ——— 2,31 reais

Após desvalorização do peso:

1 dólar ——— 1,4 peso ——— 2,31 reais

1 peso ——— x

$x = 2,31 \div 1,4 = 1,65$

a) 1 peso passou a valer 1,65 reais

b) Com 2,31 reais comprava-se 1 peso argentino. Depois, para 1,65 reais valendo 1 peso argentino, com 2,31 reais passou-se a comprar mais de 1 peso argentino, ou seja, houve valorização do real.

Matemática

2ª Questão: (10,0 pontos)

Como parte dos procedimentos para avaliação de seus alunos, um professor de Matemática aplicou duas provas.

A média aritmética simples de todas as notas das duas provas foi 4,9. Entretanto, atribuindo-se peso 1 às notas da primeira prova e peso 2 às notas da segunda prova, a média aritmética ponderada obtida foi 5,1.

Determine a média aritmética simples das notas desses alunos em cada uma das provas, separadamente.

Cálculo e resposta:

Notação: x (resp. y) é a média aritmética simples das notas da primeira (resp. segunda) prova.

Então, $\dfrac{x+y}{2} = 4{,}9$, $\dfrac{x+2y}{3} = 5{,}1$.

Resolvendo o sistema, obtemos

$x = 4{,}3$ e $y = 5{,}5$

Matemática

3ª Questão: (10,0 pontos)

Um tanque, contendo inicialmente uma população viva de 1000 girinos indicada por P(0), sofre contaminação e, então, essa população passa a se alterar, diariamente, segundo a lei

$$P(n) = 10^{-0,1}\, P(n-1) \quad , 1 \leq n \leq 30,$$

em que n indica o n-ésimo dia após a contaminação.

Determine quantos dias terão decorrido, após a contaminação, para que a população esteja reduzida a 10 girinos vivos.

Cálculo e resposta:

Trata-se de uma progressão geométrica de razão $10^{-0,1}$ e primeiro termo $10^{3-0,1}$.

Então, $P(n) = 10^{3-0,1} \times (10^{-0,1})^{n-1} = 10^{3-0,1n}$.

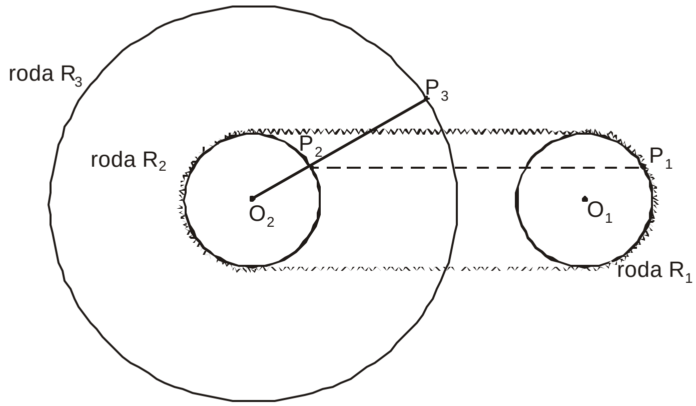
Consequentemente,

$P(n) = 10 \Leftrightarrow 3 - 0,1n = 1 \Leftrightarrow n = 20.$

Resposta: Vai se reduzir a 10 girinos no vigésimo dia.

4ª Questão: (10,0 pontos)

A figura representa uma bicicleta ergométrica com as seguintes características:



- as rodas dentadas R_1 e R_2 de centros, respectivamente, O_1 e O_2 possuem, ambas, 8 cm de raio e estão ligadas por uma corrente;
- a roda R_3 tem 24 cm de raio, centro em O_2 e está fixada em R_2 .

Considere o plano da figura representando o plano complexo onde O_1 é identificado a $z_1 = 0 + 0i$, O_2 a $z_2 = -40 + 0i$ e P_1 a $z = 4\sqrt{3} + 4i$.

Seja P_2 um ponto de R_2 tal que $P_1P_2O_2O_1$ é um paralelogramo.

Determine o número complexo w que identifica o ponto P_3, sobre R_3, obtido pelo prolongamento do raio O_2P_2.

Cálculo e resposta:

$$\overrightarrow{O_1P_3} = W = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2P_3} = \frac{24}{8}\overrightarrow{O_2P_2} + \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{24}{8}(Z - Z_1) + Z_2 - Z_1$$

$$= 12\sqrt{3} - 40 + 12\,i$$

5ª Questão: (10,0 pontos)

Sabendo que três amigos nasceram no período de 21 a 30 do mês de junho, determine a probabilidade de ao menos dois deles terem nascido no mesmo dia.

Cálculo e resposta:

Primeira solução:

Pelo princípio multiplicativo da contagem temos:

nº de possibilidades para que os 3 amigos tenham nascido no mesmo dia: 10 x 1 x 1 = 10

nº de possibilidades para que apenas 2 amigos tenham nascido no mesmo dia: 3 x (10 x 1 x 9) = 270

nº de possibilidades para que ao menos dois deles tenham nascido no mesmo dia: 10 + 270 = 280

nº total de possibilidades: 10 x 10 x 10

$$\text{Probabilidade} = \frac{280}{1000} = \frac{28}{100} = 28\%$$

Segunda solução:

Probabilidade de os três amigos terem nascido em dias distintos:

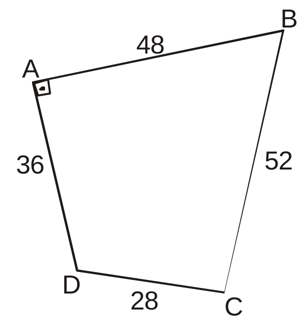
$$\frac{10 \times 9 \times 8}{10 \times 10 \times 10} = \frac{18}{25}$$

Probabilidade de ao menos dois amigos terem nascido no mesmo dia:

$$1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25} = \frac{28}{100}$$

6ª Questão: (10,0 pontos)

Um terreno tem a forma de um quadrilátero ABCD de lados $\overline{AB} = 48$ m, $\overline{BC} = 52$ m, $\overline{CD} = 28$ m e $\overline{AD} = 36$m, tal que o ângulo $\hat{A}$ é reto e o ângulo $\hat{C}$ é obtuso (figura).

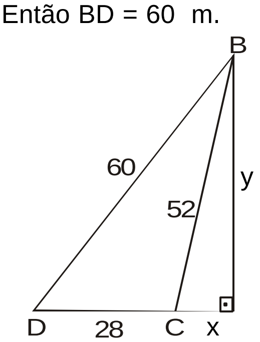


Determine a área do terreno.

Cálculo e resposta:

$$S_{ABD} = \frac{36 \times 48}{2} = 864 \text{ m}^2$$

ΔABD é pitagórico. Então $\overline{BD} = 60$ m.



Pelo Teorema de Pitágoras

$(28 + x)^2 + y^2 = 60^2$

$x^2 + y^2 = 52^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 52^2 - x^2$

$784 + 56x + x^2 + 2704 - x^2 = 3600 \quad \Rightarrow \quad 56x = 112 \Rightarrow x = 2$

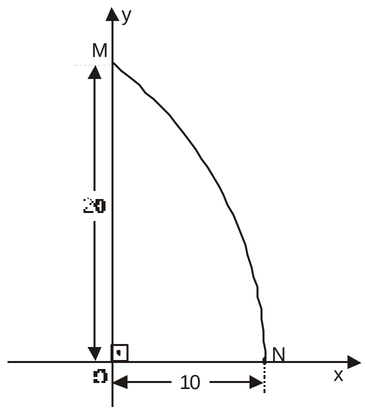
$y^2 = 52^2 - 2^2 = 2704 - 4 = 2700 \qquad y = 30\sqrt{3}$

Logo $S_{BCD} = \dfrac{30 \cdot 30\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2 \cdot 30\sqrt{3}}{2} = 14 \cdot 30\sqrt{3} = 420\sqrt{3}$

Resp.: $(864 + 420\sqrt{3})\text{m}^2$

7ª Questão: (10,0 pontos)

Usando-se um programa de computação que constrói gráfico de função y = f(x), deseja-se traçar o arco $\widehat{MN}$ de uma circunferência, que tem centro sobre o eixo x, satisfazendo às condições indicadas na figura abaixo.



Determine a expressão de y = f(x), $0 \leq x \leq 10$, cujo gráfico descreve o arco $\widehat{MN}$.

Cálculo e resposta:

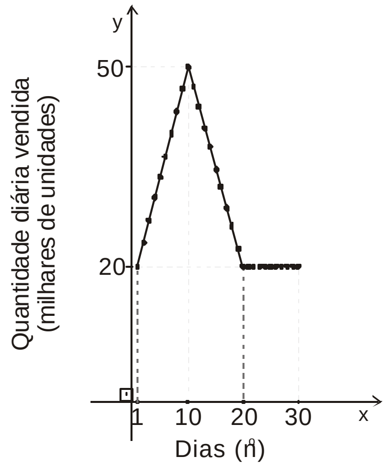
Centro C(c, 0) e raio R.

Temos d(M, C) = d (N, C) = R, ou seja, $20^2 + c^2 = (10 - c)^2$. Calculando, temos c = - 15. Portanto, R = 25 e a equação da circunferência é $(x + 15)^2 + y^2 = 25^2$.

Logo $f(x) = \sqrt{625 - (x + 15)^2}$, $0 \leq x \leq 10$.

8ª Questão: (10,0 pontos)

Certo produto foi divulgado por meio de propaganda diária em um canal de televisão.
A venda desse produto ao longo dos trinta primeiros dias de propaganda está representada no gráfico:



a) Sabendo que o gráfico acima é constituído por pontos pertencentes a três segmentos de reta, escreva a lei que determina, nesse período de 30 dias, a quantidade diária vendida do produto.

b) Informe quantas unidades foram vendidas no 15º dia.

c) Calcule o total de unidades vendidas nos dez primeiros dias da propaganda.

Cálculos e respostas:

reta que passa pelos pontos (1, 20) e (10, 50): $y = \frac{10}{3}x + \frac{50}{3}$

reta que passa pelos pontos (10,50) e (20, 20): $y = -3x + 80$

$$a)\ f(n) = \begin{cases} \frac{10n}{3} + \frac{50}{3}, & 1 \le n \le 10 \\ -3n + 80, & 10 \le n \le 20, \\ 20, & 20 \le n \le 30 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

b) $f(15) = -3 \times 15 + 80 = 80 - 45 = 35$

Resp.: 35 mil unidades

c) P. A. de razão $\frac{10}{3}$, $a_1 = 20$ e $a_{10} = 50$

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \times 10}{2} = \frac{(20 + 50) \times 10}{2} = 350$$

Resp. 350 mil unidades

Matemática

9ª Questão: (10,0 pontos)

Um questionamento freqüente, relativamente ao problema da obesidade, diz respeito a qual seria o "peso" ideal de uma pessoa.

Para avaliar seu "peso" ideal, a pessoa pode calcular seu Índice de Massa Corporal (IMC) por meio da fórmula

$$\text{IMC} = \frac{\text{"peso"}}{\text{"quadrado da altura"}}$$

e, em seguida, consultar a tabela:

	IMC (kg / m^2)	
	Mulher	Homem
Abaixo do peso	abaixo de 19	abaixo de 20
Normal	19 a 23,9	20 a 24,9
Obesidade leve	24 a 28,9	25 a 29,9
Obesidade moderada	29 a 38,9	30 a 39,9
Obesidade grave ou mórbida	acima de 39	acima de 40

Fonte: OMS (Organização Mundial da Saúde)

Verificou-se que um adulto, cuja estatura, hoje, é 1,85 m, tem IMC igual a 22 kg/m^2, valor este que correspondia a seu IMC há cinco anos, quando media 1,75 m.

Considere as informações acima e determine a diferença entre os "pesos" desse indivíduo nas duas oportunidades mencionadas.

Cálculo e resposta:

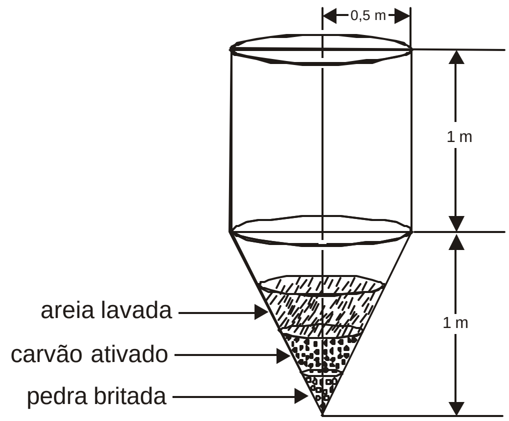
"peso" final $\longrightarrow$ $p_2 = 22 \times (1{,}85)^2$

"peso" inicial $\longrightarrow$ $p_1 = 22 \times (1{,}75)^2$

Variação de "peso" = $22 \times ((1{,}85)^2 - (1{,}75)^2) = 7{,}92$ kg

10ª Questão: (10,0 pontos)

Para a filtragem da água de uma residência, o proprietário mandou construir um reservatório formado por um cilindro circular reto de 1 m de altura e raio da base 0,5 m, na parte superior, e, por um cone circular reto de 1 m de altura, na parte inferior (como indica a figura). Até 2/3 da altura da parte cônica, colocaram-se camadas de pedra britada, carvão ativado e, finalmente, areia lavada.



No interior do reservatório cheio, qual o volume ocupado pela água contida acima da camada de areia lavada?

Cálculo e resposta:

Volume do cilindro : $\pi \cdot (0,5)^2 \cdot 1 = 0,25\,\pi\, m^3$.

Volume do cone: $\dfrac{\pi.(0,5)^2\ .1}{3} = \dfrac{0,25\pi}{3}$

Raio da base do cone filtro: $\dfrac{0,5}{x} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{3}.$

Volume do cone filtro: $\dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2\pi}{81}.$

Volume de água: $V = 0,25\pi \ + \left(\dfrac{0,25\,\pi}{3} - \dfrac{2\,\pi}{81}\right) = \dfrac{25\,\pi}{81}\, m^3$

Resposta: $\dfrac{25\,\pi}{81} m^3$