Padrão de respostas às questões discursivas

A seguir encontram-se as questões das provas discursivas da 2ª ETAPA do Vestibular UFF 2011, acompanhadas das respostas esperadas pelas bancas.

MATEMÁTICA - GRUPOS I e J

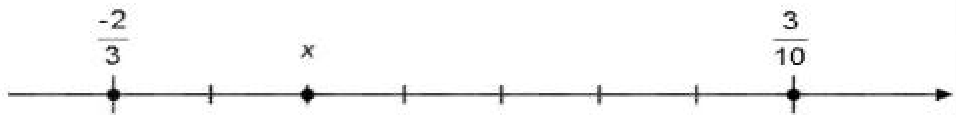
1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | Revisor

a) Determine os 3 (três) primeiros dígitos da representação decimal do número $\frac{14}{13}$; ou seja, escrevendo $\frac{14}{13} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, com $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, determine os valores de a_0, a_1 e a_2. **(0,5 ponto)**

b) Sendo $\mathbf{a} = 2^{3000}$ e $\mathbf{b} = 3^{2000}$, verifique se **a** é igual, maior ou menor do que **b**. Justifique sua resposta. **(0,5 ponto)**

c) Considerando que, na reta real esboçada abaixo, o intervalo $\left[\frac{-2}{3}, \frac{3}{10}\right]$ está dividido em 7 (sete) partes iguais, determine o número que corresponde ao ponto x indicado na figura e escreva sua resposta em forma de fração irredutível. **(1,0 ponto)**



Cálculos e respostas:

a) Dividindo-se 14 por 13,

$$
\begin{array}{r|l}
14 & 13 \\ \cline{2-2}
-13 & 1{,}07 \\ \hline
10 & \\
-0 & \\ \hline
100 & \\
-91 & \\ \hline
9 &
\end{array}
$$

obtém-se a representação decimal $\frac{14}{13} = 1{,}07....$ Portanto os 3 (três) primeiros dígitos de tal representação são: 1, 0 e 7.

(b) $\mathbf{a} = 2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$; $\mathbf{b} = 3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000}$. Como 8^{1000} é menor do que 9^{1000}, **a** é menor do que **b**.

(c) O comprimento do intervalo é $\frac{3}{10} - (-\frac{2}{3}) = \frac{29}{30}$. Como ele foi dividido em 7 partes iguais, os comprimentos de cada um dos novos intervalos é $\frac{29}{30} : 7 = \frac{29}{210}$. Portanto, o ponto x corresponde ao número real

$$\frac{-2}{3} + \frac{29}{210} + \frac{29}{210} = \frac{-41}{105}.$$

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Determine os valores dos números reais *A*, *B* e *C*, tais que

$$\frac{2x^2+3x-5}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}-\{2,-1\}$.

Cálculos e respostas:

Tem-se:

$$\frac{2x^2+3x-5}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{(A+B)\,x^2+(2A-B+C)\,x+(A-2B-2C)}{(x-2)(x+1)^2}$$

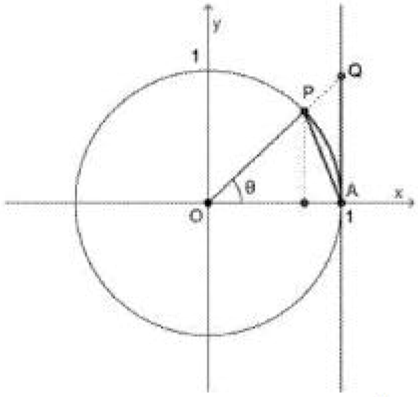
$\Leftrightarrow A+B=2,\quad 2A-B+C=3 \quad \text{e} \quad A-2B-2C=-5.$

Logo, A = 1, B = 1 e C = 2.

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | | Revisor | |

Fixado um sistema de coordenadas retangulares no plano, sejam A = (1,0) e O = (0,0). Considere P um ponto sobre o círculo de centro em O = (0,0) e raio 1. Sabe-se que a medida, em radianos, do ângulo $\theta = A\hat{O}P$, indicado na figura, pertence ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Sejam Q o ponto de interseção da reta x = 1 com a semirreta OP, **u** a área do triângulo AOP, **v** a área do setor circular AOP (correspondente ao ângulo $A\hat{O}P$) e **w** a área do triângulo AOQ.



a) Determine **u**, **v** e **w** em função do ângulo $\theta = A\hat{O}P$. **(1,2 ponto)**

b) Observe na figura que **u** < **v** < **w**. Considerando esse fato, demonstre as desigualdades:

$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$. **(0,8 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) **u** $= \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}\theta$, **v** $= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\theta$ e **w** $= \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\theta$, com $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

b) Dos resultados obtidos no item (a) conclui-se: $\frac{\operatorname{sen}\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\operatorname{tg}\theta}{2}$. Portanto, $1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$ e, assim,

$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$.

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador Revisor

Seja f a função definida por $f(x) = \dfrac{5}{3e^x - 7}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \ln\frac{7}{3}$.

Determine:

a) o menor inteiro maior do que f(ln 3); **(0,4 ponto)**
b) o valor de x que satisfaz a equação f(x) = − 1; **(0,4 ponto)**
c) os valores de x que satisfazem a inequação f(x) > 0. **(1,2 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) $f(\ln 3) = \dfrac{5}{3e^{\ln 3} - 7} = \dfrac{5}{9-7} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$. Portanto, o menor inteiro pedido é 3.

b) $f(x) = -1 \Leftrightarrow 3e^x - 7 = -5 \Leftrightarrow 3e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{2}{3}$.

c) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3e^x - 7 > 0 \Leftrightarrow e^x > \dfrac{7}{3} \Leftrightarrow x > \ln\dfrac{7}{3}$.

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Considere os subconjuntos A, B e C do $\mathbb{R}^2$ definidos por

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$;

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 - 2y \leq 3\}$;

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + (y+1)^2 \leq 16\}$.

Determine:

a) os respectivos centros e raios das circunferências de equações $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 2y = 3$; $x^2 + (y+1)^2 = 16$; **(0,8 ponto)**

b) a área da região $S = C - (A \cup B)$. **(1,2 ponto)**

Cálculos e respostas:

a) O centro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é o ponto (0,0) e o seu raio é 1.
Como,

$$x^2 + y^2 - 2y = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 3 + 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4 = 2^2,$$

tem-se que o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2y = 3$ é o ponto (0,1) e o seu raio é 2.

O centro da circunferência $x^2 + (y+1)^2 = 16 = 4^2$ é o ponto (0, −1) e o seu raio é 4.

b) Como $A \cup B = B$, então área de S = (área de C − área de B) = $16\pi - 4\pi = 12\pi$.