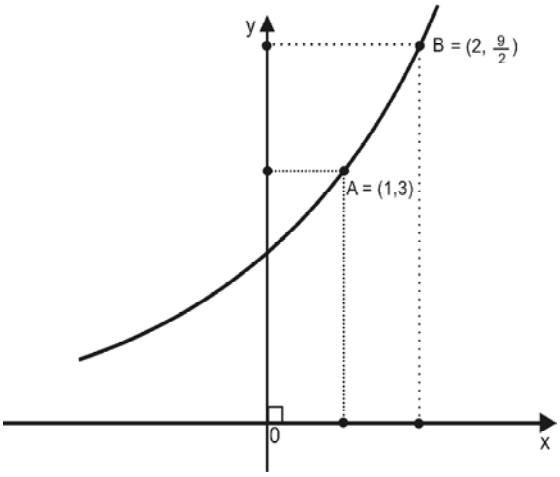
GABARITO - MATEMÁTICA - Grupo G

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

O gráfico da função exponencial *f*, definida por $f(x) = k \cdot a^x$, foi construído utilizando-se o programa de geometria dinâmica gratuito GeoGebra (http://www.geogebra.org), conforme mostra a figura a seguir:



Sabe-se que os pontos A e B, indicados na figura, pertencem ao gráfico de *f*. Determine:

a) os valores das constantes *a* e *k*;

b) $f(0)$ e $f(3)$.

Cálculos e respostas:

a) Como $f(2) = 9/2$ e $f(1) = 3$, tem-se $9/2 = k\,a^2$ e $3 = k\,a$, portanto $k = 2$ e $a = 3/2$.

b) Usando-se os resultados obtidos no item anterior, tem-se $f(x) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Assim,

$$f(0) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 2 \quad \text{e} \quad f(3) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{4}.$$

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | Revisor

a) Escreva o número 306 como produto de números primos.

b) Considere os números naturais $a = 2^{17} \times 3^{28} \times 7^{10}$ e $b = 2^9 \times 5^2 \times 7^{16}$. Escreva o maior divisor comum e o menor múltiplo comum de *a* e *b* como produto de potências de números primos.

c) Quantos divisores inteiros positivos o número $b = 2^9 \times 5^2 \times 7^{16}$ possui?

Cálculos e respostas:

a) 306 = 2 x 3 x 3 x 17.

b) m.d.c.$(a, b) = 2^9 \times 7^{10}$ e m.m.c.$(a, b) = 2^{17} \times 3^{28} \times 5^2 \times 7^{16}$.

c) Um divisor inteiro positivo do número *b* deve ser da forma

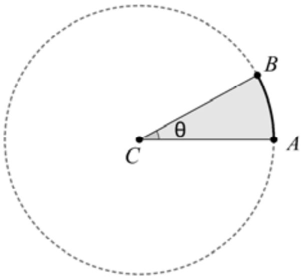
$$d = 2^x \times 5^y \times 7^z$$

com *x*, *y* e *z* números inteiros tais que $0 \le x \le 9$, $0 \le y \le 2$ e $0 \le z \le 16$. Existem, portanto, 510 (= 10 x 3 x 17) divisores inteiros positivos do número *b*.

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | Revisor

Na figura abaixo, *A* e *B* são dois pontos da circunferência de centro em *C*, o segmento *AC* mede 2 cm e o arco de círculo *AB,* que subtende o ângulo θ, mede 1 cm.



Calcule:

a) o perímetro do setor circular *ACB* de ângulo central θ;
b) a medida do ângulo em radianos e em graus;
c) a área do setor circular *ACB* de ângulo central θ.

Cálculos e respostas:

a) Note-se que $\overline{CA} = \overline{CB}$. Assim, o perímetro do setor circular *ACB* é igual a 2 + 2 + 1 = 5 cm.
b) Tem-se:

$$\text{medida de } \theta \text{ em radianos} = \frac{\text{medida do arco } AB}{\text{medida do segmento } AC} = \frac{1}{2}.$$

A medida de θ em graus é igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \left(\frac{90}{\pi}\right)^\circ.$$

c) A área do setor circular *ACB* é dada por

$$\frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi \cdot (2)^2 = \frac{1/2}{2\pi} \cdot \pi \cdot (2)^2 = 1\,\text{cm}^2.$$

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | Revisor

Dois dados cúbicos não viciados, cujas faces estão numeradas de 1 a 6, são jogados aleatoriamente e simultaneamente sobre uma mesa plana. Se a soma dos valores sorteados(*) for um número par, Paulo ganha a partida. Se a soma for um número ímpar, Lúcia ganha. Ao perder a primeira partida, Lúcia diz que não irá mais jogar porque a regra favorece Paulo. Seu argumento é o seguinte: dentre os onze valores possíveis para a soma (os inteiros de 2 a 12), há seis números pares e apenas cinco números ímpares. Logo, Paulo tem maior probabilidade de ganhar.

a) Calcule a probabilidade de Lúcia ganhar uma partida. Justifique sua resposta.

b) Use o item **a** para verificar se o argumento de Lúcia está correto.

(*) Valor sorteado é o número escrito na face do cubo oposta à face que está apoiada na mesa.

Cálculos e respostas:

a) O espaço amostral desse experimento é o conjunto A, com 36 elementos:

A = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }.

O evento “a soma dos valores sorteados é um número ímpar” é o conjunto E, com 18 elementos:

E = { (1, 2), (1, 4), (1, 6),
(2, 1), (2, 3), (2, 5),
(3, 2), (3, 4), (3, 6),
(4, 1), (4, 3), (4, 5),
(5, 2), (5, 4), (5, 6),
(6, 1), (6, 3), (6, 5) }.

Logo, a probabilidade de Lúcia ganhar é igual a 18/36 = 1/2 = 50%.

b) O cálculo feito no item (a) mostra que Paulo e Lúcia têm a mesma probabilidade de ganhar uma partida.

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Determine uma equação para cada reta que passa pelo ponto (2, 4) e intercepta o gráfico da função f definida por $f(x) = x^2$ em um único ponto.

Cálculos e respostas:

Como (2, 4) é um ponto do gráfico de f, existem duas retas que passam pelo ponto (2, 4) e interceptam o gráfico de f em um único ponto. Uma delas é vertical com equação $x = 2$. A outra é a reta tangente ao gráfico de f no ponto (2, 4). Uma equação para ela pode ser calculada da seguinte maneira: escrevendo-se $y = m\,x + p$, tem-se que $4 = 2\,m + p$ (pois a reta deve passar pelo ponto (2, 4)) e a equação quadrática

$$x^2 = m\,x + p$$

possui uma única solução (pois a reta deve interceptar o gráfico de f em um único ponto). Segue-se então que $4 = 2\,m + p$ e $m^2 + 4p = 0$. Resolvendo-se esse sistema, obtém-se os seguintes valores:
$m = 4$ e $p = -4$. Assim, $y = 4\,x - 4$ é uma equação da reta não vertical que passa pelo ponto (2, 4) e intercepta o gráfico de f em um único ponto.