Matemática - Grupos I e J - Gabarito

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Os números n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, listados abaixo, são racionais. Escreva-os na forma de fração irredutível $\frac{p}{q}$ com p e q números inteiros, sendo $q \neq 0$.

$$n_1 = \frac{2-\frac{3}{4}}{2-\frac{1}{3}}, \quad n_2 = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j = 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^j+\cdots, \quad n_3 = \binom{100}{98},$$

$$n_4 = -\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right), \quad n_5 = e^{\ln(2{,}95)}.$$

Cálculos e respostas:

- $$n_1 = \frac{\frac{8-3}{4}}{\frac{6-1}{3}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{4}.$$

- n_2 é a soma dos infinitos termos da PG de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 1 e, assim,

$$n_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3-1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

- $$n_3 = \frac{100!}{2!\,98!} = \frac{98!\cdot 99\cdot 100}{2\cdot 98!} = 50\cdot 99 = 4950 = \frac{4950}{1}.$$

- $$n_4 = -\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -\log_{10}\left(10^{-2}\right) = -(-2) = 2 = \frac{2}{1}.$$

- Como a função exponencial é a inversa da função logarítmica, segue-se que

$$n_5 = 2{,}95 = \frac{295}{100} = \frac{59}{20}.$$

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador

Revisor

Uma pessoa ia gastar R$ 396,00 para comprar ***x*** caixas de um determinado produto. Ao receber o pedido de compra, a empresa fornecedora fez um desconto de R$ 8,00 no preço de cada caixa. Devido a isto, a pessoa conseguiu comprar duas caixas a mais, pagando os mesmos R$ 396,00. Pergunta-se:

a) quantas caixas do produto tal pessoa comprou?
b) qual o preço inicial (sem desconto) de cada caixa do produto?

Cálculos e respostas:

Sendo x a quantidade inicial de caixas que a pessoa ia comprar e denotando-se por y o preço inicial de cada caixa, tem-se:

$$x\,y = 396 \quad \text{e} \quad (x+2)\,(y-8) = 396.$$

O sistema a ser resolvido é equivalente a:

$$x\,y = 396 \quad \text{e} \quad y = 4x+8.$$

Ou ainda,

$$x\,(4x+8) = 396 \quad \text{e} \quad y = 4x+8.$$

A equação $x\,(4x+8) = 396$ é equivalente a $x^2 + 2x - 99 = 0$, e esta possui o número 9 como única raiz positiva. Portanto,

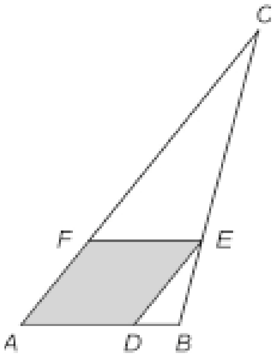
$x = 9$ e $y = 4 \cdot 9 + 8 = 36 + 8 = 44$.

A pessoa comprou então 9 + 2 = 11 caixas e o preço inicial de cada caixa era de R$ 44,00.

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Na figura ao lado, os pontos *D*, *E* e *F* pertencem, respectivamente, aos lados *AB*, *BC* e *AC* do triângulo *ABC*. Eles foram escolhidos de tal forma que o quadrilátero *ADEF* é um losango. Sabe-se que o perímetro deste losango é 20 cm e que o segmento *AB* mede 7 cm. Determine:



a) a medida do lado *AD* do losango *ADEF;*

b) a medida do segmento *AC*;

c) a área do losango *ADEF*, sabendo-se que $\cos(F\hat{A}D) = \frac{3}{5}$.

Cálculos e respostas:

a) Como os lados de um losango têm a mesma medida, o lado *AD* mede 20 ÷ 4 = 5 cm.

b) Seja *x* a medida do segmento *FC*. O lado *AC* mede então 5 + *x*. Como os ângulos $F\hat{E}C$ e $D\hat{B}E$ são congruentes, assim como os ângulos $C\hat{F}E$ e $E\hat{D}B$, tem-se que os triângulos *ECF* e *BED* são semelhantes e, portanto:

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{DB}}, \quad \text{isto é,} \quad \frac{x}{5} = \frac{5}{2}.$$

Daí segue-se que x = $\frac{25}{2}$. Logo, a medida do lado *AC* é $5 + \frac{25}{2} = \frac{35}{2}$ cm.

c) Tem-se que $\text{sen}(F\hat{A}D) = \sqrt{1 - \cos^2(F\hat{A}D)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Assim, a área do losango *ADEF* é igual a $\overline{AD} \cdot \overline{AF} \cdot \text{sen}(F\hat{A}D) = 5 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 20$ cm².

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Considere a circunferência C definida por $(x\text{-}2)^2 + (y\text{-}1)^2 = 25$. Determine:

a) as coordenadas do centro de C e a área da região delimitada por C;

b) uma equação para a reta que passa pelo centro de C e pelo ponto $(-1,5)$;

c) uma equação para a reta tangente à circunferência C no ponto $(-1,5)$.

Cálculos e respostas:

a) As coordenadas do centro da circunferência C são (2,1) e o seu raio r é 5 u.c.
Portanto, a área pedida é igual a $\pi\, 5^2 = 25$ u.a..

b) Uma equação para a reta que passa pelos pontos (2,1) e (–1,5) é dada por

$y - 1 =$ $(x-2)$, ou equivalentemente, $y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$.

c) A reta tangente à circunferência C no ponto (–1,5) é perpendicular à reta determinada no item b).

Portanto, seu coeficiente angular é $\frac{3}{4}$. Neste caso, uma equação para esta reta tangente é:

$y - 5 = \frac{3}{4}(x+1)$, ou equivalentemente, $y = \frac{3}{4}x + \frac{23}{4}$.

Matemática - Grupos I e J - Gabarito

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Considere a função $h(x) = a\,(x-b)^2$. Sabe-se que o gráfico de h contém os pontos $(1,0)$ e $(0,2)$.

a) Determine os valores das constantes a e b. Justifique sua resposta.

b) Sabendo-se que $h(x) = (f \circ g)(x)$, onde $f(x) = 2\,x^2$ e $g(x)$ é uma função afim decrescente, determine $g(3)$. Justifique sua resposta.

c) Resolva a equação $f(x) - h(x) = |x|$.

Cálculos e respostas:

a) Como o gráfico de h passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0,2)$, tem-se que $0 = a\,(1-b)^2$ e $2 = a\,(0-b)^2$, logo, $a = 2$, $b = 1$ e $h(x) = 2\,(x-1)^2$.

b) $h(x) = 2\,(x-1)^2$, $f(x) = 2\,x^2$ e $h(x) = (f \circ g)\,(x)$ implicam que $2\,(x-1)^2 = 2\,(g(x))^2$. Como g é uma função afim decrescente segue-se, necessariamente, que $g(x) = -x+1$ e $g(3) = -2$.

c) A equação $f(x) - h(x) = |x|$ é equivalente a $2\,x^2 - 2\,x^2 + 4\,x - 2 = |x|$, ou ainda, $4x - 2 = |x|$.

Se $x \geq 0$, tem-se

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) - h(x) = |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

de onde se obtém a solução $x = \dfrac{2}{3}$.

Se $x < 0$, a equação não possui solução, pois

$$\begin{cases} x < 0 \\ f(x) - h(x) = |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 4x - 2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

que é um sistema incompatível.