MATEMÁTICA - Grupo G - Gabarito

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Os números n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, listados abaixo, são racionais. Escreva-os na forma de fração irredutível $\frac{p}{q}$ com p e q números inteiros, sendo $q \neq 0$.

$$n_1 = \frac{2-\frac{3}{4}}{2-\frac{1}{3}}, \quad n_2 = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j = 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^j+\cdots, \quad n_3 = \binom{100}{98},$$

$$n_4 = -\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right), \quad n_5 = e^{\ln(2{,}95)}.$$

Cálculos e respostas:

- $n_1 = \dfrac{\frac{8-3}{4}}{\frac{6-1}{3}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{4}.$

- n_2 é a soma dos infinitos termos da PG de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 1 e, assim,

  $n_2 = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{3-1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$

- $n_3 = \dfrac{100!}{2!\cdot 98!} = \dfrac{98!\cdot 99\cdot 100}{2\cdot 98!} = 50\cdot 99 = 4950 = \dfrac{4950}{1}.$

- $n_4 = -\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -\log_{10}\left(10^{-2}\right) = -(-2) = 2 = \frac{2}{1}.$

- Como a função exponencial é a inversa da função logarítmica, segue-se que

  $n_5 = 2{,}95 = \dfrac{295}{100} = \dfrac{59}{20}.$

MATEMÁTICA - Grupo G - Gabarito

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Uma herança de R$ 360.000,00 deverá ser dividida em duas partes, x e y, de tal modo que $\frac{y}{x} = \frac{5}{4}$.
Determine os valores de x e y.

Cálculos e respostas:

Tem-se

$$\begin{cases} x + y = 360000, \\ y = \frac{5}{4}x. \end{cases}$$

Substituindo-se o valor de y da segunda equação na primeira equação, segue-se que

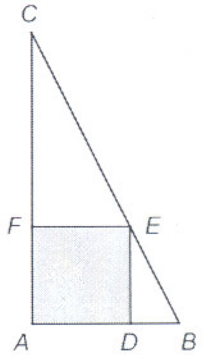
$x + \frac{5}{4}x = 360000$. Portanto, x = R$ 160.000,00 e $y = \frac{5}{4}x =$ R$ 200.000,00.

MATEMÁTICA - Grupo G - Gabarito

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Avaliador | | Revisor | |

Na figura ao lado, os pontos *D*, *E* e *F* pertencem, respectivamente, aos lados *AB*, *BC* e *AC* do triângulo *ABC*. Eles foram escolhidos de tal forma que o quadrilátero *ADEF* é um quadrado. Sabe-se que o lado *AB* mede $\frac{3}{2}$ cm e que a área do quadrado *ADEF* é igual a 1 cm². Determine:



a) o perímetro do quadrado *ADEF*;
b) a medida dos dois outros lados do triângulo *ABC*;
c) o cosseno do ângulo $A\hat{C}B$.

Cálculos e respostas:

a) Se a área do quadrado é igual a 1 cm², então seu lado mede 1cm e, portanto, seu perímetro é igual a 4 cm.

b) Seja x a medida do segmento *CF*. Como os ângulos $F\hat{E}C$ e $D\hat{B}E$ são congruentes, os triângulos retângulos *CEF* e *EBD* são semelhantes. Portanto,

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BD}}, \text{ isto é, } \frac{x}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Logo, $x = \overline{CF} = 2$ cm e, portanto, $\overline{AC} = \overline{FA} + \overline{CF} = 1\text{cm}+2\text{cm} = 3\text{cm}$. Usando-se agora o Teorema de Pitágoras, conclui-se que:

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ cm.}$$

c) Tem-se $\cos(A\hat{C}B) = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{3}{\frac{3}{2}\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

MATEMÁTICA - Grupo G - Gabarito

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Um *rally* é realizado em um circuito que passa por diferentes paisagens nordestinas: $\frac{2}{5}$ na zona da mata, $\frac{3}{7}$ em terras do sertão nordestino e os 108 km restantes na mata dos cocais.

a) Determine o comprimento do circuito completo.
b) Sabendo que 25% do percurso que se encontra na zona da mata está asfaltado, 10% do percurso que se encontra no sertão está asfaltado e que apenas 36 km do percurso que se encontra na mata dos cocais está asfaltado, determine o percentual, em relação à medida do circuito completo, da parte asfaltada do percurso.

Cálculos e respostas:

a) Denotando-se por x o comprimento do circuito completo, tem-se:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{7}x + 108 = x.$$

Portanto, $x = 630$ km.

b) Os comprimentos dos percursos asfaltados na zona da mata e no sertão são dados respectivamente por $\frac{25}{100} \cdot \frac{2}{5} \cdot 630 = 63$ km e $\frac{10}{100} \cdot \frac{3}{7} \cdot 630 = 27$ km. Portanto, o comprimento da parte asfaltada do circuito completo é 63 + 27 + 36 = 126 km. Logo, o percentual pedido é

$$\frac{126}{630} = \frac{1}{5} = 20\%.$$

MATEMÁTICA - Grupo G - Gabarito

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Considere a função $h(x) = a\,(x-b)^2$. Sabe-se que o gráfico de h contém os pontos (1,0) e (0,2).

a) Determine os valores das constantes a e b. Justifique sua resposta.
b) Sabendo-se que $h(x) = (f \circ g)(x)$, onde $f(x) = 2x^2$ e $g(x)$ é uma função afim decrescente, determine $g(3)$. Justifique sua resposta.
c) Resolva a equação $f(x) - h(x) = |x|$.

Cálculos e respostas:

a) Como o gráfico de h passa pelos pontos (1,0) e (0,2), tem-se que $0 = a\,(1-b)^2$ e $2 = a\,(0-b)^2$, logo, $a = 2$, $b = 1$ e $h(x) = 2\,(x-1)^2$.

b) $h(x) = 2\,(x-1)^2$, $f(x) = 2x^2$ e $h(x) = (f \circ g)(x)$ implicam que $2\,(x-1)^2 = 2\,(g(x))^2$. Como g é uma função afim decrescente segue-se, necessariamente, que $g(x) = -x+1$ e $g(3) = -2$.

c) A equação $f(x) - h(x) = |x|$ é equivalente a $2x^2 - 2x^2 + 4x - 2 = |x|$, ou ainda, $4x - 2 = |x|$.
Se $x \geq 0$, tem-se

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) - h(x) = |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - 2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

de onde se obtém a solução $x = \dfrac{2}{3}$.

Se $x < 0$, a equação não possui solução, pois

$$\begin{cases} x < 0 \\ f(x) - h(x) = |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 4x - 2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

que é um sistema incompatível.